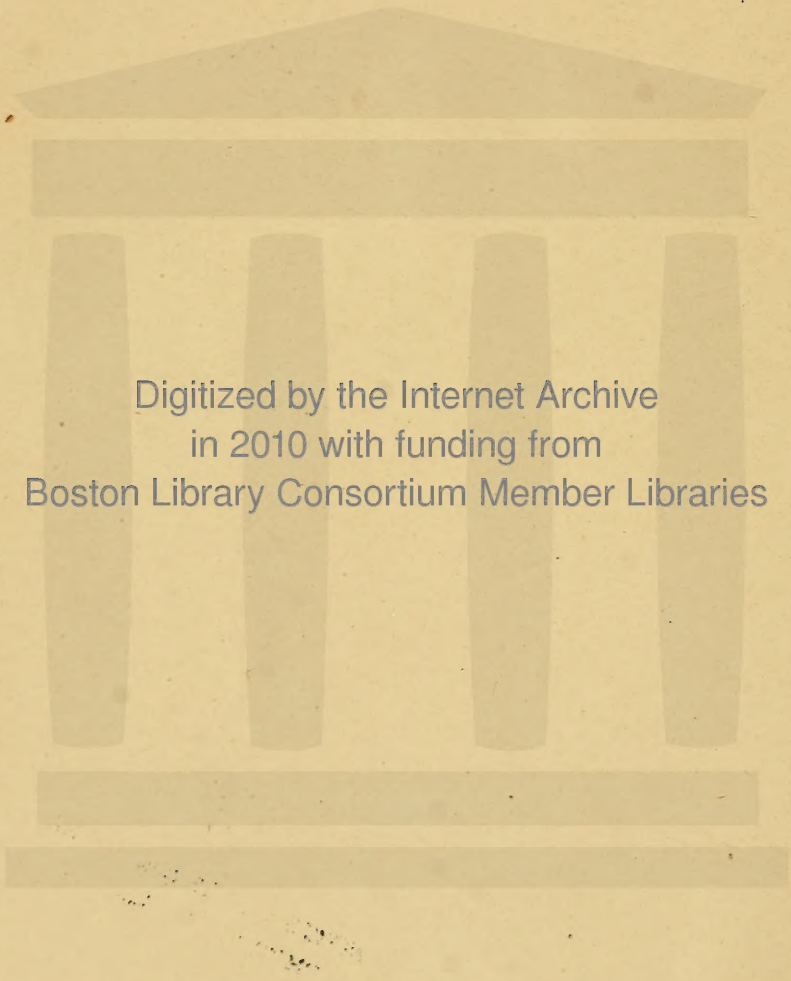
QA685
.K6



Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
Boston Library Consortium Member Libraries

http://www.archive.org/details/nichteuklidische01klei

Nicht-Euklidische Geometrie, I.

Vorlesung,

gehalten während des Wintersemesters 1889–90

von

F. Klein.

Ausgearbeitet von Fr. Schilling.

Zweiter Abdruck.

GÖTTINGEN 1893.

BOSTON COLLEGE LIBRARY
CHESTNUT HILL, MASS.
MATH. DEP

150089

Vorbemerkung zum ersten Abdruck.

Die nachstehende Autographie bringt die von mir im Wintersemester 1889—90 gehaltene Vorlesung über Nicht-Euklidische Geometrie nach der Ausarbeitung des Herrn Schilling, unter Beiseitelassung einer allgemeinen Einleitung in die projective Geometrie, in der ich u. A. die projectiven Grundlagen der gewöhnlichen Metrik entwickelt hatte. Ich habe diese Vorlesung im Sommer 1890 noch fortgesetzt; diese Fortsetzung soll jetzt ebenfalls autographiert werden. Was einschlägige Litteratur angeht, die seit 1890 erschienen ist, so verweise ich insbesondere auf die Darstellung der Nicht-Euklidischen Geometrie, welche Herr Lindemann in Band II der Vorlesungen über Geometrie von A. Clebsch veröffentlicht hat, dann auch auf meine Note in Band 37 der mathematischen Annalen, in der ich einige Ideen meiner Vorlesung weiter ausführte, und auf den hier sich anschliessenden Aufsatz von Herrn Killing in Band 39 ebenda, endlich aber auf die zwei Arbeiten, welche Herr Lie in den Sitzungsberichten der Königlich Sächsischen Gesellschaft von 1890 über die Grundlagen der Geometrie veröffentlicht hat.

Göttingen, Anfang 1892.

F. Klein.

Vorbemerkung zum zweiten Abdruck.

Der nachfolgende Wiederabdruck meiner Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie von 1889—90 stimmt mit dem ersten Abdruck bis auf wenige kleine Aenderungen wörtlich überein. Ich hätte ja gern viele Lücken, die ich nachträglich bemerkt habe, ausgefüllt und namentlich auf die in der Zwischenzeit erschienene Literatur Bezug genommen, wenn dies irgend möglich gewesen wäre, ohne dafür längere Zeit aufzuwenden, was aus anderen Gründen nicht anging. Nur dies eine will ich hier ausdrücklich hervorheben, dass Helmholtz' Charakterisirung der ∞^6 Bewegungen des Raumes wie auch das Referat, welches ich über dieselben gegeben habe, nach den Untersuchungen von Lie in den sächsischen Berichten von 1886 und 1890 in keiner Weise mehr aufrecht erhalten werden kann. Ich darf den Leser dieserhalb ausser auf Lie's eigene Publicationen auf die Darlegungen verweisen, welche hierüber in dem kürzlich erschienenen zweiten Theile meiner Vorlesung über „Höhere Geometrie“ (S.-S. 1893) gegeben worden sind.

Göttingen, Herbst 1893.

F. Klein.

Inhaltsverzeichniss.

Seite

Nicht-Euklidische Geometrie I.

I. Projective Auffassung der Euklidischen Metrik.

1. Gewöhnliche Formeln für die Metrik der Ebene oder des Punktes . . 1
2. Geometrie auf der Kugel; Sphärische Trigonometrie 11
3. Die Metrik des unendlich fernen Punktes (Ebene als Grenzfall der Kugel) 26
4. Die metr. Formeln der Ebene als proj. Bez. zu den Kreispunkten . . 33
5. Laguerre's Definition des Winkels durch imag. Doppelverhältnisse . . 47
6. Die metr. Formeln des Punktes als proj. Bez. zum Kugelkreise . . . 52

II. Cayley's Maassgeometrie.

1. Aufgabenstellung 62
2. Maassbestimmung im binären Gebiet 64
3. Der elliptische, hyperbolische, parabolische Fall 69
4. Verschiedene Maassbestimmungen für Grundgebilde zweiter Stufe . . . 84
5. Der elliptische Fall. Vergleich mit der sphärischen Geometrie . . . 88
6. Die elliptische Ebene als Doppelfläche 98
7. Das Bogenelement der elliptischen Ebene 106
8. Der hyperbolische Fall. Die Parallelenfrage 108
9. Trigonometrie, Bogenelement, Flächeninhalt, Summe der Dreieckswinkel . 115
10. Der Kreis in der hyperbolischen Geometrie 125
11. Die Kinematik der hyperbolischen Geometrie. Wegfall der Aehnlichkeitstransformationen 134
12. Der parabolische Fall 151
13. Vom Krümmungsmaass (sc. der Hülfskugel) 158

III. Nicht-Euklidische Geometrie im engeren Sinne.

1. Die principielle Fragestellung; das projective System 160
2. Vorbemerkungen zum historischen Bericht 168

Erste Periode.

1. Gauss, Lobatcheffsky, Bolyai 171
2. Von dem Krümmungsmaass einer beliebigen Fläche und von den Rotationsflächen constanter Krümmung 178
3. Beltrami's Saggio di interpretazione; Beziehungen zu Cayley 194
4. Weiteres über die Flächen constanter Krümmung 200

Seite

Zweite Periode.

1. Riemann's Habilitationsschrift 205
2. Riemann's endlicher Raum 216
3. Conforme Uebertragung der hyperbol. Geometrie auf die Kugel . . . 220
4. Functionentheoretische Beziehungen 233
5. Beltrami's Teoria fondamentale 236
6. Unendlich viele Raumformen verschwindender oder neg. Krümmung . . 242
7. Perspective auf automorphe Functionen 248
8. Freier Bericht über Helmholtz, 1868 258
9. Anschliessende Literatur 275

Dritte Periode.

1. Allgemeine Vorbedingungen 280
2. Arbeiten von 1871, 72 285
3. Unterscheidung der elliptischen und der sphärischen Geometrie: Newcomb, Killing 293
4. Von der Ungenauigkeit der räumlichen Anschauung. Pasch 298
5. v. Staudt's Fundamentalsatz der proj. Geometrie. Du Bois 308
6. Vorbereitung zur endgültigen Einführung projectiver Coordinaten: die Modulfigur 315
7. Wirkliche Herstellung einer projektiven Skala 337
8. Lineare Beziehung zwischen zwei verschiedenen Skalen auf demselben Gebilde 344
9. Lie's Transformationstheorie 353

Schlussbemerkungen (philosophischer, bez. pädagogischer Natur) . 354-365

Nichteuklidische Geometrie.

I. Kapitel. Projective Auffassung der Euklidischen Metrik.

Ehe wir zu dem Hauptgegenstande unserer Vorlesung übergehen, wollen wir noch einige Betrachtungen vorausschicken, die den euklidischen Charakter bewahren. Es handelt sich darum, die Maassverhältnisse, wie wir sie in der elementaren Geometrie kennen, consequent projectivisch aufzufassen. Wir schieden bekanntlich bisher zwischen den projectivischen Eigenschaften und den nichtprojectivischen oder, wie man nicht ganz so zutreffend auch sagen kann, zwischen der Geometrie der Lage und des Maasses. Wir hatten gelernt, die projective Geometrie aus sich selbst aufzubauen, indem wir mit v. Staudt unseren Betrachtungen die Vierseitskonstruktion zu Grunde legten und mit ihrer Hülfe die Doppelverhältnisse oder Würfe als Zahlen definierten.

Bereits beginnen wir von dem so gewonnenen Standpunkte aus die Geometrie des Maasses darzustellen. Wenn es sich um die Geometrie der Ebene handelt, so bieten sich uns 2 besondere ausgezeichnete Punkte dar, die sogenannten „imaginären Kreispunkte." Ihnen entsprach, indem wir sie als eine degenerierte Curve zweiter Classe auffassten, in Punktcoordinaten die unendlich weite Gerade. Diese Kreispunkte und die unendlich ferne Gerade setzten uns in den Stand, gewisse Beziehungen der Geometrie des Maasses projectivisch zu definieren. Es sei z. B. nur an die Beantwortung der Fragen erinnert, wann ein Kegelschnitt ein Kreis ist, wann sich 2 Gerade rechtwinklig schneiden, wie sich Ellipse, Hyperbel und Parabel unterscheiden, welches das Kriterium für die Parallelität zweier Geraden ist. In allen diesen Fragen fanden wir eine Antwort, indem wir auf die imaginären Kreispunkte resp. die unendlich ferne Gerade Rücksicht nahmen.

Wir können daher allgemein sagen:

„Vom projectiven Standpunkte aus erscheinen die sämmtlichen hier zur Sprache gebrachten Begriffe nicht als Ausdrücke einer geometrischen Eigenschaft

der betreffenden Figur an sich, sondern einer Beziehung der geometrischen Figur zu einer besonderen Curve 2. Klasse, die in ein Paar imaginärer Punkte ausgeartet ist."

Wie stellen sich nun dieselben Beziehungen für die Geometrie im Punkte dar?

[Man könnte geneigt sein, das Wort Punkt-Geometrie zu bilden, was jedoch grammatikalisch falschen Sinn geben würde.] Auch hier haben wir bereits einige metrische Verhältnisse betrachtet. Wir haben z. B. gesehen, wann ein Kegel ein Rotationskegel ist, wann zwei Strahlen oder zwei Ebenen oder ein Strahl und eine Ebene auf einander senkrecht stehen. u.s.w. Wir haben diese Fragen projektivisch beantwortet, indem wir den „absoluten Kegel" berücksichtigten.

„Es können also entsprechend die hier aufgeführten auf Geometrie im Punkte bezüglichen metrischen Begriffe aufgefasst werden als projektive Beziehungen der Figuren zu einem bestimmten Kegel 2. Klasse oder 2. Ordnung, dem absoluten Kegel."

Unsere nächste Aufgabe wird es nun sein in dem hiermit bezeichneten Sinne die metrischen Beziehungen noch ausführlicher zu betrachten. Wir werden uns zu fragen

haben, was ist überhaupt ein Winkel, was verstehen wir unter dem Abstand zweier Punkte? Die Antwort auf solche Fragen giebt uns die Maassgeometrie oder Metrik. Wir können daher unsere folgenden Untersuchungen auch mit der Frage überschreiben:

„Wie ordnet sich die Metrik der Ebene und die Metrik im Punkte in die projective Geometrie ein?"

Wir wollen zunächst die gewöhnlichen hierher gehörigen analytischen Formeln zusammenstellen, bei denen wir uns der homogenen Coordinaten x, y, z. resp. u, v, w, bedienen, [die sich an das rechtwinklige System anschliessen] und solche Bemerkungen zufügen, die im Interesse unserer späteren Betrachtungen wichtig sind.

I. Metrik in der Ebene. In dieser haben wir drei Aufgaben zu lösen. Wir haben nämlich zu untersuchen:

1. den Abstand zweier Punkte.
2. den Abstand eines Punktes von einer Geraden.
3. die Bestimmung des Winkels zweier Geraden.

Ad. 1. Der Abstand zweier Punkte drückt sich analytisch aus:

$$r = \pm \frac{\sqrt{(xz' - x'z)^2 + (yz' - y'z)^2}}{zz'}$$

Es ist dies die gewöhnliche analytische Formel, nur scheint sie

in homogener Form. Wir haben dem Abstande r ein doppeltes Vorzeichen gegeben. In der gewöhnlichen Geometrie wird r immer als positiv angesehen, doch ist hierfür durchaus kein zwingender Grund vorhanden. Vor allem, wenn man das Princip der Continuität aufrecht erhalten will, wird man genötigt sein, auch negative Werte von r zuzulassen. Wir sagen ausdrücklich: Der Abstand r ist eine zweiwerthige Funktion, und nur durch besondere Verabredung kann einer der beiden Werte festgelegt werden.

Ad. 2. Der Abstand p eines Punktes von einer Geraden drückt sich analytisch aus:

$$p = \pm \frac{ux + vy + wz}{z \sqrt{u^2 + v^2}} .$$

Auch hier haben wir dem Abstande p ein doppeltes Vorzeichen gegeben. Es gilt hier dieselbe Bemerkung wie unter 1. Der Zähler des Ausdrucks für p giebt gleich 0 gesetzt bekanntlich die Bedingung des Ineinanderliegens von Punkt und Gerade an; es ist ja dann auch der Abstand $p = 0$.

Ad. 3. Ueber den Winkel, den zwei sich schneidende Gerade mit einander bilden, werden wir ausführlicher zu sprechen haben. Zunächst muss ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass wir es bei unserer Fragestellung mit 2 Voll=

strahlen, nicht mit 2 Halbstrahlen zu thun haben. Es handelt sich darum auch nicht um den Winkel, welchen zwei Halbstrahlen der sich schneidenden Geraden bilden. (Fig.1.)

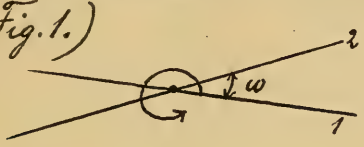
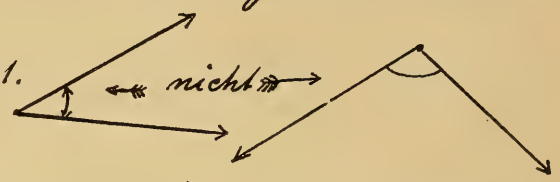


Fig.1.



Wir definieren nun den Winkel so: Um wie viel muss ich die Gerade 1 drehen, damit sie mit der Geraden 2 zusammenfällt? Wir erkennen sofort, das wir noch einen festen Drehsinn (als den positiven Drehsinn) festlegen müssen. Es ist Gebrauch, den Drehsinn entgegengesetzt der Bewegung des Uhrzeigers als positiv anzunehmen. (vergl. Fig.1.) Ferner sehen wir, wie bei der Drehung 1 wiederholt mit 2 zusammenfällt, so dass wir sagen können: „Da es sich bei dem Winkel zweier geraden Linien in der Ebene um den Winkel zweier Vollstrahlen, nicht zweier Halbstrahlen handelt, so ist die Grösse eines Winkels nur bis auf ganzzahlige Multipla von π festgelegt. Wir rechnen dabei den Winkel 1 gegen 2 so, dass wir angeben, um welchen Betrag man 1 im positiven Sinne drehen muss, damit es in 2 fällt."

Nun hat die tang. bekanntlich die Periodicität π, sin und

cos. dagegen nur die von 2π.

„Dementsprechend muss cos. w und sin w durch einen Ausdruck gegeben sein, der eines doppelten Vorzeichens fähig ist, tg. w aber durch einen Ausdruck, der eindeutig ist." Es ist dies auch in der That der Fall, da in den Formeln für cos. w und sin. w im Nenner eine Quadratwurzel auftritt, die bei tg. w als Quotient von $\frac{\sin. w}{\cos. w}$ fortgefallen ist. Die analytischen Formeln lauten dementsprechend:

$$\cos. w = \pm \frac{uu' + vv'}{\sqrt{(u^2+v^2)(u'^2+v'^2)}} \; ; \quad \sin. w = \pm \frac{uv' - u'v}{\sqrt{(u^2+v^2)(u'^2+v'^2)}} ;$$

$$tg. w = \frac{uv' - u'v}{uu' + vv'}$$

Anm.: Wir vermissen in unseren Formeln in 1, 2, 3, das Princip der Dualität. Wir werden später genauer den Grund hiervon untersuchen. Doch können wir schon jetzt sagen:

„Unsere Formeln sind durchaus undualistisch entsprechend dem Umstande, dass der fundamentale Kegelschnitt undualistisch partikularisiert ist."

Denn letzterer, bestehend aus den imaginären Kreispunkten, ist ja in ein Punktepaar ausgeartet, dem dualistisch die doppelt zählende unendlich ferne Gerade

zugeordnet ist.

II. Metrik im Punkte. Auch hier haben wir drei Aufgaben zu lösen, nämlich den Winkel zu bestimmen, den

1./ 2 Strahlen

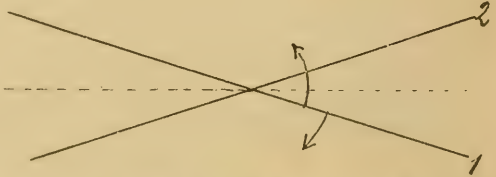
2./ ein Strahl und eine Ebene,

3./ zwei Ebenen

mit einander bilden

Ad. 1. Wir müssen uns fragen, wie weit der Winkel bestimmt ist, den zwei Strahlen mit einander bilden. Auch hier haben wir es natürlich mit 2 Vollstrahlen, nicht mit 2 Halbstrahlen zu thun. Dazu können wir jetzt keinen festen Drehsinn als positiv angeben, da wir die Figur als beliebig im Raume befindlich anzusehen haben, so dass nebenstehende Zeichnung ebenso berechtigt ist, wie das Spiegelbild. Man erhält ja das letztere, indem man unsere Figur um ihre Mittellinie ------ ein halb Mal herumdreht

Figur 2,



„Der Winkel zweier Strahlen ist daher jetzt nicht nur bis auf beliebige Multipla von π unbestimmt, sondern er

kann auch beliebig im Vorzeichen geändert werden."
" Dementsprechend muss nicht nur der cos. und sin., sondern auch die trigonometrische Tangente von w ein doppeltes Vorzeichen besitzen."

In der That ergeben die analytischen Formeln, dass nicht nur im Nenner für cos. w und sin. w ein Wurzelzeichen, und zwar in beiden dasselbe, auftritt, sondern ausserdem besteht auch der Zähler von sin w aus einer Wurzelgrösse, so dass auch tg. w eine solche behält. Die Formeln sind nämlich:

$$\cos. w = \pm \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \cdot \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}};$$

$$\sin. w = \pm \frac{\sqrt{(yz'-y'z)^2+(x'z-xz')^2+(xy'-x'y)^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}};$$

$$tg. w = \pm \frac{\sqrt{(yz'-y'z)^2+(x'z-xz')^2+(xy'-x'y)^2}}{xx'+yy'+zz'};$$ —

Ad. 2 und 3. Hat eine Ebene die Coordinaten u, v, w, so sind dies zugleich die Coordinaten der Normale derselben, d.h. der ihr in Bezug auf den absoluten Kegel zugeordneten Polaren. Auch hier wird die Normale nicht als Halbstrahl, sondern als Vollstrahl gedacht.

Eine Gerade (x, y, z) bildet daher mit der Normalen

einer Ebene (u, v, w) Winkel, die bestimmt sind durch die Formeln:

$$\cos.\omega = \pm \frac{xu + yv + zw}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{u^2+v^2+w^2}};$$

$$\sin.\omega = \pm \frac{\sqrt{(yw - vz)^2+(zu - wx)^2+(xv - uy)^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$$

$$tg.\omega = \pm \frac{\sqrt{(yw - vz)^2+(zu - wx)^2+(xv - uy)^2}}{xu + yv + zw}$$

Analog bilden zwei Ebenen u, v, w und u', v', w' mit einander Winkel, die gegeben werden durch die Formeln:

$$\cos.\varphi = \pm \frac{uu' + vv' + ww'}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}\cdot\sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}};$$

$$\sin.\varphi = \pm \frac{\sqrt{(vw' - v'w)^2+(wu' - w'u)^2+(uv' - u'v)^2}}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}\cdot\sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}}$$

$$tg.\varphi = \pm \frac{\sqrt{(vw' - v'w)^2+(wu' - w'u)^2+(uv' + u'v)^2}}{uu' + vv' + ww'};$$

Anm. Wir bemerken bei der Metrik im Punkte einen wesentlichen Unterschied gegenüber der Metrik in der Ebene.

1. Das hier in 1, 2, 3 erhaltene Formelsystem ist nämlich

sich selbst durchaus dualistisch, was dem Umstande entspricht, dass der absolute Kegel ein nicht specialisierter Kegel zweiter Ordnung und zweiter Klasse ist." Auch hierauf werden wir später zurückkommen.

Wir wollen nun in einem kurzen Excurs betrachten, wie die Elementargeometrie die Aufgaben der Metrik im Punkte löst. In der Elementargeometrie ist es ein unbekannter Gedanke, Strahlen (oder Ebenen) als Elemente zu betrachten; dort werden nur Punkte durch Coordinaten festgelegt bez. Curven als geometrische Oerter für Punkte in Betracht gezogen. Um daher Fragen der „Metrik im Punkte" zu beantworten, legt man um den Punkt eine Kugel vom Radius 1, welche die durch denselben laufenden Strahlen und Ebenen in bestimmten Punkten resp. grössten Kreisen schneidet, deren Beziehungen zu einander man nun betrachtet. So wird die Maassbestimmung im Punkte ersetzt durch die Maassbestimmung auf der Kugel, die sphärische Geometrie, im weiteren Sinne durch die sphärische Trigonometrie. Dabei ist aber, wie wohl zu beachten, die Abbildung des Strahlbüschels auf die Kugel keine eindeutige. Wir erkennen vielmehr:

„Wenn man der elementaren Vorstellungsweise folgt, dass man das von einem Punkte ausgehende Strahlenbündel auf eine um den Punkt laufende Kugel überträgt und so die Geometrie im Punkte in eine sphärische Geometrie verwandelt, so ist dies keine ein – eindeutige Beziehung, sondern eine ein – zweideutige Beziehung." Denn jedem Punkte der Kugel entspricht ein Strahl, jedem Strahl dagegen entsprechen zwei Punkte auf der Kugel.

Die Folge hiervon ist nun, dass in der elementaren Geometrie die Bestimmung der Winkel genauer festgelegt werden kann, wie bei unseren soeben gegebenen Erörterungen.

Wir wollen hierauf noch näher eingehen, da diese Betrachtung später für uns vom Vorteil sein wird. Bei der Metrik im Punkte war unsere Aufgabe, den Winkel zwischen zwei Vollstrahlen zu bestimmen, hier dagegen haben wir es nur mit zwei Halbstrahlen zu thun, deren Richtungsunterschied gesucht ist.

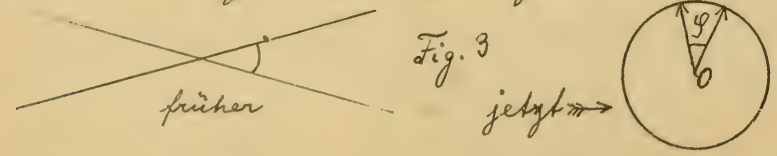


Fig. 3

Unsere Aufgabe ist also specialisierter. Während der Winkel zwischen den Vollstrahlen nur bis auf das Vorzeichen und ein beliebiges Multiplum von π bestimmt war, können wir jetzt folgenden Satz aussprechen: „Indem wir die Geometrie auf der Kugel an Stelle der Geometrie im Punkte betrachten, erscheint der Winkel φ zwischen zwei Strahlen (Halbstrahlen) bis auf das Vorzeichen und Multipla von 2π bestimmt."

Der allgemeine Wert des gesuchten Winkels ist gleich $\pm\varphi + 2k\pi$;

Was bedeutet dies nun für $\sin.\varphi$ und $\cos\varphi$?

Da $\cos.(+\varphi) = \cos(-\varphi)$, dagegen $\sin.(+\varphi) = -\sin.(-\varphi)$ ist, $\cos.(\varphi+2\pi)$ und $\sin.(\varphi+2\pi)$ aber übereinstimmend gleich $\cos.(\varphi)$, bezw. $\sin(\varphi)$, so muss dem letzten Satze entsprechen, daß $\cos.\varphi$ sich jetzt eindeutig festlegen lässt, während $\sin.\varphi$ nach wie vor ein doppeltes Vorzeichen behält."

Betrachten wir nun die analytischen Formeln und sehen, wie dies stimmt. Es ist zunächst:

$$\cos.\varphi = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)}}.$$

Da jedoch x, y, z resp. x', y', z', jetzt die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte sind, in welchen die

Halbstrahlen die Kugelfläche schneiden, so tritt eine bedeutende Vereinfachung der Formel ein. Es ist ja: $x^2+y^2+z^2=1$ und $x'^2+y'^2+z'^2=1$ — denn der Radius der Kugel ist gleich der Längeneinheit zu setzen —, so daß der Nenner sich auf eine Konstante reduciert. Wir haben die Wahl, diese Konstante gleich +1 oder gleich −1 zu setzen. Aus der Betrachtung des speciellen Falles, wo die beiden Halbstrahlen zusammenfallen, folgt, daß wir +1 zu wählen haben. Haben wir aber so einmal zwischen +1 und −1 entschieden, so nöthigt uns das Princip der Continuität nicht, wie früher, zu dem andern Vorzeichen zu kommen, da ja der Nenner garnicht mehr variabel ist. Dagegen behalten wir im Ausdrucke von $\sin.\mathcal{S}$ eine Quadratwurzel:

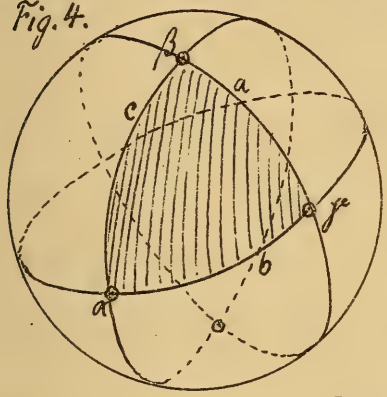
$$\sin.\mathcal{S}=\pm\sqrt{(yz'-y'z)^2+(x'z-xz')^2+(xy'-x'y)^2},$$

wieder in Uebereinstimmung mit unserer Ueberlegung.

„Unser vorhin aufgestelltes Resultat stimmt daher mit der analytischen Formel, in welcher die Quadratwurzel sich jetzt auf eine Konstante reduciert, sodass nicht etwa ihr Wert bei der Bewegung der in Vergleich kommenden Punkte sich im Vorzeichen ändern kann."

An diese Erläuterungen wollen wir noch einige Bemerkungen über sphärische Trigonometrie anschliessen: Es sei auf der Kugel vom Radius 1 ein sphärisches

Fig. 4.



Dreieck gezeichnet, d.h. ein Dreieck, dessen Seiten Bogen grösster Kreise sind.

Durch die Schraffierung des Dreiecks haben die Winkel α, β, γ und die Seiten a, b, c ganz bestimmte Beträge. Wir wollen nun ausdrücklich bemerken, so trivial dies auch klingen mag:

„Die sphärische Trigonometrie hat es mit den absoluten Werten dreier Winkel α, β, γ und dreier anderer Winkel a, b, c (auch als Seiten des Dreiecks bezeichnet) zu thun, die nicht etwa durch Multiplication von π oder 2π modificiert werden können."

Die elementare sphärische Trigonometrie betrachtet nun nur die sin. und cos. der eben genannten 6 Winkel und giebt die Beziehungen derselben zu einander an. Sie zeigt vor allem, wie man, wenn einige der sin. und cos. gegeben sind, die anderen daraus

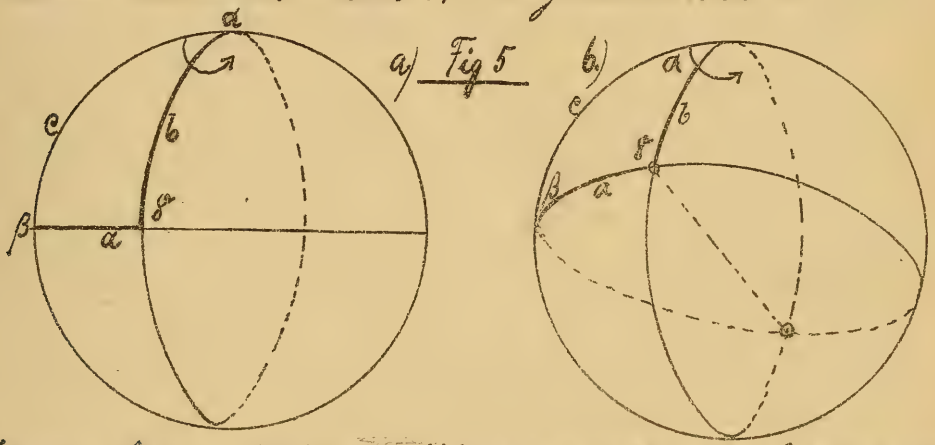
bestimmen kann. Doch es bleiben bekanntlich der sin. und cos. eines Winkels unverändert, wenn man zu ihm $2k\pi$ hinzufügt. Wie kommt es, daß in der elementaren Trigonometrie die Winkel dennoch aus ihren sin. und cos. hinreichend bekannt sind?

„Wenn trotzdem die gewöhnliche sphärische Trigonometrie sich darauf beschränkt, nur die sin. und cos. der 6 Größen in Betracht zuziehen, so liegt dies daran, weil sie stillschweigend das Bestehen folgender Ungleichung voraussetzt:

$$0 < \alpha, \beta, \gamma, a, b, c < 2\pi.$$

Doch ist es unbedingt nötig, diese Voraussetzung zu machen? Nein, keineswegs. Man kann sehr wohl solche Dreiecke betrachten, bei denen einige der Winkel $> 2\pi$ oder < 0 sind. Die Functionentheorie zwingt sogar dazu, solche Dreiecke herbeizuziehen, bei denen Windungspunkte in den Ecken liegen und die Seiten in Folge dessen mehrmals um die Kugel herumlaufen. Ein einfaches Beispiel möge uns der specielle Fall der nebenstehenden Figur bieten. Wir wollen die Bezeichnung, zum besseren Verständnis, der mathematischen Geographie entlehnen. Es sei α

der Nordpol, a ein Bogen des Aequators, c ein Bogen des Anfangsmeridians (Fig. 5, a). Wir können nun sehr wohl den Winkel α über 2π hinaus wachsend denken. Das Dreieck α, β, γ greift dann allerdings über sich selbst hinüber, was ja bei der Betrachtung Riemann'scher Flächen durchaus nichts Aussergewöhnliches ist.

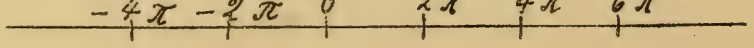


Ja, wir können sogar den Winkel α über 4π, 6π etc. wachsen lassen. Es ist natürlich, dass der Winkel a in unserem speciellen Falle gleichfalls mehrere Windungen auf dem Aequator macht und in dem entsprechenden Intervall 0 bis 2π, 2π bis 4π u.s.w liegt. Denn der Winkel α und der Winkel a sind stets einander gleich.

Wir können uns ferner von der Wahl des speciellen Dreiecks in Fig 5 a. befreien, dieselben Betrachtungen gelten auch für das Dreieck α β γ in Fig 5 b. Wir können

endlich diese Betrachtungen ausdehnen auf den Fall, wo nun auch die übrigen Ecken des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ als Windungspunkte erscheinen, wenn die Vorstellung sich jetzt auch schwieriger gestaltet. Allgemein kann man sagen: „Die elementare sphärische Trigonometrie kann man dahin verallgemeinern (und die Functionentheorie drängt mit Notwendigkeit auf diese Verallgemeinerung hin), dass man auch Dreiecke zulässt, deren Winkel $\alpha\beta\gamma$ und $abc > 2\pi$ sind (oder < 0 sind), bei denen also Windungspunkte in den Ecken und mehrfache Ueberdeckungen der Kugel und einzelner Teile derselben auftreten. Für solche Dreiecke geben die gewöhnlichen Formeln der sphärischen Trigonometrie, indem sie blos den sin. und cos. der $\alpha\beta\gamma$, abc beherrschen, nur erst einen ersten Beitrag, es fehlt eine zweite Reihe von Relationen, die uns angeben, wie die absoluten Werte von $\alpha\beta\gamma$ und abc unter einander verbunden sind."

Diese zweite Reihe von Relationen wird uns anzugeben haben — etwa in einer Tabelle —, auf welches Intervall der folgenden Skala



die Werthe von a, b, c treffen, wenn gesagt ist, auf welches Intervall die $\alpha\beta\gamma$ zu liegen kommen und umgekehrt. Es kann nicht schwer sein, durch Continuitätsbetrachtungen diese Tabelle zu finden. Daneben bestehen dann ungeändert die gewöhnlichen Formeln der sphärischen Trigonometrie.

Zusatz.

Wir können dieselben Betrachtungen, wie sie die sphärische Trigonometrie anstellt, natürlich auch in der Geometrie im Punkte vornehmen. Dem sphärischen Dreieck entspricht hier ein Dreikant, doch bestehen die Kanten desselben wieder aus Vollstrahlen, die nach den Ecken des sphärischen Dreiecks laufen:

„Alles, was dann von den sphärischen Dreiecken gilt, kann man auf die Dreikante übertragen, welche sich vom Mittelpunkte der Kugel aus nach den sphärischen Dreiecken hinziehen, nur dass man die Bedingung: $0 < \alpha\beta\gamma\, abc < \pi$ stellen muss, wenn man keine mehrfachen Ueberdeckungen von Teilen des Raumes haben will." —

Wir wollen nun noch eine letzte Frage in Betreff

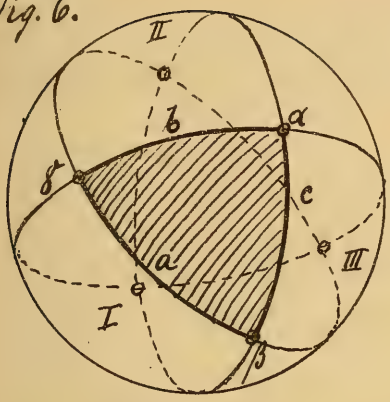
der sphärischen Trigonometrie stellen. Ist in der Trigonometrie ebenso wie bei den allgemeinen Grundlagen der Metrik im Punkte das Princip der Dualität gültig?

„Von Hause aus ist dies keineswegs notwendig, wenn auch die Maassbestimmung im Punkte sich selbst dualistisch ist und bei dualistischer Umformung den Ecken eines sphärischen Dreiecks die Begrenzungslinien eines zweiten, den Seiten die Ecken eines anderen Dreiecks entsprechen. Denn das, was wir von dem sphärischen Dreieck schraffieren, (v. Fig. 6) und eben dadurch als Dreiecksfläche bezeichnen, ist ein Aggregat von unendlich vielen Punkten und dem wird dualistisch ein Aggregat nicht von Punkten, sondern von Ebenen bezw. grössten Kreisen entgegenstehen."

Wir wollen jedoch noch näher hierauf eingehen und zu dem Zweck einmal 3 grösste Kreise auf der Kugel ziehen und zusehen, wie die Kugelfläche hierdurch zerlegt wird.

Wir erkennen sofort aus der Figur, daß die Kugeloberfläche in 8 Dreiecke zerlegt ist, von denen je zwei dieselben Winkel und Seiten haben. Uebrigens

Fig. 6.



sind die zwei nicht zu einander kongruent, sondern vielmehr symmetrisch, indem die Reihenfolge der Winkel resp. Seiten eine verschiedene ist.

Wir brauchen daher nur 4 verschiedene Dreiecke zu unterscheiden; außer dem ursprünglichen Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ wollen wir betrachten die drei Dreiecke I, II, III, welche jedesmal das ursprüngliche zu einem sphärischen Zweieck ergänzen. Aus letzter Bezeichnung folgen sofort die Winkel und Seiten der drei Dreiecke:

I.	$\alpha\,;\ \pi-\beta\,;\ \pi-\gamma$	$a\,;\ \pi-b\,;\ \pi-c\,;$
II.	$\pi-\alpha\,;\ \beta\,;\ \pi-\gamma$	$\pi-a\,;\ b\,;\ \pi-c\,;$
III	$\pi-\alpha\,;\ \pi-\beta\,;\ \gamma\,;$	$\pi-a\,;\ \pi-b\,;\ c.$ —

Wir erkennen:

„Jeder Winkel kommt bei den 8 Dreiecken im Ganzen viermal vor, und da jedes Dreieck 6 Bestimmungsstücke mit sich bringt, so werden wir

im Ganzen $\frac{8 \cdot 6}{4} = 12$ verschiedene Winkel haben, nämlich $\alpha\beta\gamma$, abc und ihre Nebenwinkel."

Wir können diesem Satze auf Grund obiger Tabelle sofort die Folgerung hinzufügen:

Folgerung: „Die Gleichungen der sphärischen Trigonometrie müssen die Eigenschaft haben, ungeändert zu bleiben, wenn man die Elemente des ursprünglichen Dreiecks durch die Elemente einer der obigen drei Reihen ersetzt."

Wie steht es nun mit der Dualität in der sphärischen Trigonometrie? Wir wollen die Figur 6 auf pag. 21 zum Zweck dieser Untersuchung dualistisch in Bezug auf den absoluten Kegel umformen. Es entsprechen dabei den drei grössten Kreisen auf der Kugel dualistisch die Schnittpunkte ihrer drei Normalen — diese als Vollnormalen betrachtet — mit der Kugelfläche, denn die Polare einer Ebene ist die Normale derselben. Umgekehrt entsprechen den 6 Eckpunkten, von denen je zwei auf demselben Kugeldurchmesser liegen, die drei grössten Kreise, in welchen die auf den 3 Durchmessern senkrechten Ebenen die Kugeloberfläche

schneiden. Wir haben so die Polarfigur, spec. die Polardreiecke zu den ursprünglichen Dreiecken erhalten. Diese Betrachtung der Polardreiecke ist in der elementaren Geometrie ganz gewöhnlich, sie war bereits angewendet, sobald man anfing sich mit sphärischer Trigonometrie zu beschäftigen, zu einer Zeit, als das Princip der Dualität noch keineswegs allgemein bekannt war. Auch bei der Polarfigur ist also die Kugel in 8 Dreiecke geteilt, die den ursprünglichen zwar dualistisch entsprechen, was die Ecken und die begrenzenden Kreislinien angeht, doch nicht so, dass auch die Dreiecksfelder selbst zu einander polar wären. Vielmehr entspricht den einzelnen Punkten der Dreiecksflächen der ersten Figur bei der dualistischen Umkehr eine Schaar von grössten Kreisen und umgekehrt. Daher darf es uns auch nicht wundern, dass wir in den Dreiecken der Polarfigur Zusammenstellungen von Winkeln und Seitenlängen erhalten, die nicht ganz dualistisch denen der ursprünglichen Dreiecke entsprechen. Folgendes Schema wird die Seitenlängen und Eckenwinkel für die Dreiecke beider Figuren geben:

Ursprüngliche Figur:		Polarfigur:
a, b, c ; α, β, γ;	entspricht:	$\pi-\alpha, \pi\beta, \pi-\gamma$; $\pi-a, \pi-b, \pi-c$
I. $a, \pi-b, \pi-c$; $\alpha, \pi-\beta, \pi-\gamma$	"	$\pi-a, \beta, \gamma$; $\pi-a, b, c$;
II. $\pi-a, b, \pi-c$; $\pi-\alpha, \beta, \pi-\gamma$	"	$\alpha, \pi-\beta, \gamma$; $a, \pi-b, c$;
III. $\pi-a, \pi-b, c$; $\pi-\alpha, \pi-\beta, \gamma$	"	$\alpha, \beta, \pi-\gamma$; $a, b, \pi-c$;

Dementsprechend können wir folgenden Satz aussprechen:

„Die Formeln der sphärischen Trigonometrie sind nicht direkt sich selbst dualistisch, sie bleiben nicht ungeändert, wenn man $\alpha\beta\gamma$ mit a, b, c bezw. vertauscht mit $\pi-\alpha, \pi-\beta, \pi-\gamma$; $\pi-a, \pi-b, \pi-c$. oder auch durch die Grössen irgend einer der folgenden Horizontalzeilen ersetzt."

Da nun $\cos(\pi-a) = -\cos. a$

$\sin(\pi-a) = \sin. a$ ist, so können wir auch sagen:

„Die Formeln der sphärischen Trigonometrie bleiben ungeändert richtig, wenn man in ihnen a, b, c bezw. mit α, β, γ vertauscht und dabei alle cos. im Vorzeichen ändert."

Zum Abschluss dieser Betrachtungen wollen wir die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie, um

uns später leicht auf dieselben beziehen zu können, hier ausdrücklich zusammenstellen.

Anmerkung: Als Litteratur ist an dieser Stelle zu erwähnen: Baltzer, Elemente der Mathematik.

Dies Werk ist des systematischen Aufbaues und der historischen Notizen wegen, die sich in ihm finden, als Handbuch besonders zu empfehlen.

Die Formeln lauten zunächst:

I. $\sin. a : \sin b. = \sin \alpha : \sin \beta.$;

II. $\cos. a = \cos. b. \cos. c + \sin b. \sin c \cos. \alpha$;

III. $tg. \beta = \dfrac{tg\, b. \sin \alpha}{\sin. c - tg. b \cos c \cos. \alpha}$;

Wenden wir auf diese 3 Grundgleichungen unseren letzten Satz über die Vertauschung der Winkel und Seiten an, so liefert uns die Gleichung II die neue Formel:

II'. $\cos. \alpha = -\cos. \beta \cos \gamma + \sin. \beta. \sin \gamma \cos. a$. Dagegen liefert uns die Gl. I wie die Gl. III nichts Neues. Während die Gl I bei der Vertauschung in sich selbst übergeht, würde uns die Gl III eine Formel liefern, die wir aus III auch durch Auflösung nach tg b erhalten würden.

Diese Formeln werden wir weiterhin auch so

benutzen, dass wir sie nicht auf die Kugel vom Radius 1, sondern auf eine Kugel von einem beliebigen Radius R sich beziehen lassen. Im letzteren Falle mögen die Seiten eines sphärischen Dreiecks gleich A, B, C gesetzt sein, aus denen sich dann a, b, c ergeben als resp $\frac{A}{R}, \frac{B}{R}, \frac{C}{R}$. Unsere Formeln nehmen dann die Gestalten an:

I. $\sin \frac{A}{R} : \sin \frac{B}{R} = \sin a : \sin. B.;$

II. $\cos. \frac{A}{R} = \cos. \frac{B}{R} \cos. \frac{C}{R} + \sin \frac{B}{R} \sin \frac{C}{R} \cos. a;$

III. $tg. \beta = \frac{tg \frac{B}{R} . \sin. a}{\sin \frac{C}{R} - tg \frac{B}{R} \cos. \frac{C}{R} \cos. a};$

II', $\cos. a. = -\cos. \beta \cos. \gamma + \sin \beta \sin. \gamma \cos. \frac{A}{R}.$

Wir kehren nun zu den allgemeinen Betrachtungen zurück. Wir hatten gesprochen von der Maassbestimmung in der Ebene und im Punkte. Hierbei haben wir jedoch stillschweigend eine Voraussetzung gemacht, nämlich dass im ersten Falle die Ebene, im zweiten der Punkt im Endlichen gelegen seien. Von diesen Voraussetzungen wollen wir uns jetzt befreien. Wir betrachten zunächst den Fall, wo der Punkt ins Unendliche gerückt ist. Wir wollen einmal annehmen, er befände sich in der Richtung vertikal

nach oben im Unendlichen. Dann werden alle Strahlen, die nach ihm hingehen, einander parallel sein; die Ebenen, die durch ihn hindurchlaufen, sind sämmtlich zu Vertikalebenen geworden. In diesem extremen Falle der Metrik im Punkte werden wir dann allgemein wohl noch von dem Winkel zweier Ebenen, aber nicht mehr von dem „Winkel" zweier Strahlen, sondern nur von ihrem „Abstande" reden können. Wir führen diesen Fall jedoch sofort auf eine bekannte Betrachtungsweise zurück, wenn wir dies specielle Strahlen- und Ebenenbündel durch eine Horizontalebene schneiden und so alle Bestimmungen auf die Punkte und Strahlen in dieser Ebene übertragen, wobei die gewöhnlichen Abstände und Winkel der Ebene entstehen.

„Liegt also bei der Metrik im Punkte dieser unendlich weit, so hat die Maassbestimmung, die sich auf seine geraden Linien und Ebenen bezieht, durchaus den Charakter der gewöhnlichen Maassbestimmung in einer im Endlichen verlaufenden Ebene."

[„2 Strahlen haben einen Abstand, nicht einen Winkel"]

Gewissermassen analoge Verhältnisse finden statt, wenn bei der Metrik der Ebene diese unendlich weit fortrückt.

Zwei Strahlen in dieser Ebene bilden dann zwar noch einen bestimmten Winkel, aber der Abstand zweier Punkte wird stets unendlich gross. Wir verfahren entsprechend dem vorhergehenden Fall, wo wir eine Schnittebene anwandten, jetzt so, dass wir von einem bestimmten Punkte im Unendlichen aus die Punkte und Strahlen der unendlich fernen Ebene durch Strahlen resp. Ebenen projicieren. Hierdurch wird der Winkel zweier Strahlen der unendlich fernen Ebene durch den Winkel zweier durch den Punkt laufenden Ebenen, der Abstand zweier Punkte dagegen durch den Winkel zweier Strahlen ersetzt.

„Wir sehen, dass so umgekehrt die Maassbestimmungen in der unendlich weiten Ebene ganz den Charakter besitzen, den wir für die Maassbestimmungen in einem im Endlichen gelegenen Punkte kennen."

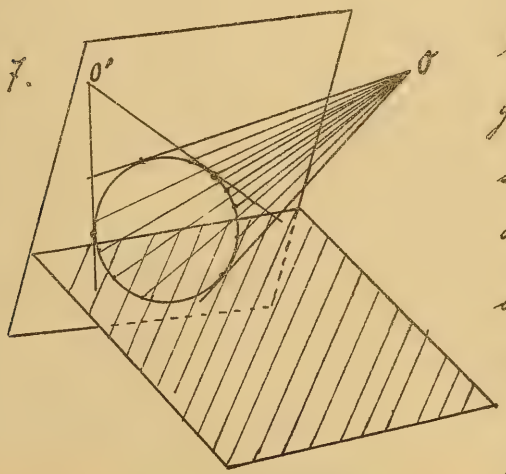
[„Zwei Punkte geben ein Winkel, nicht einen Abstand."].

Wir werden einen deutlichen Einblick in diese Verhältnisse gewinnen, wenn wir diese Sätze in Zusammenhang bringen mit dem imaginären Kugelkreis. Haben wir doch schon früher wiederholt darauf hingewiesen, ohne zwar bereits näher darauf eingegangen zu sein, dass die

Maassverhältnisse überhaupt in engem Zusammenhang stehen mit den imaginären Kreispunkten, in denen die Ebene den Kugelkreis schneidet resp. dem absoluten Kegel, der sich vom Punkte nach dem Kugelkreis hinerstreckt. Es sei in nebenstehender Figur der Kreis eine schematische Darstellung des imaginären Kugelkreises.

Wenn wir nun von einem Punkte im Endlichen aus nach dem Kugelkreise blicken, so bekommen wir einen eigentlichen (wenn auch imaginären) Kegel. Schneiden wir ferner den Kugelkreis durch eine Ebene, — und jede reelle Ebene muss ihn treffen — so schneidet diese denselben nur in 2 Punkten, den imaginären Kreispunkten dieser Ebene, diese Punkte können wir als einen ausgearteten Kegelschnitt ansehen, der in Punktcoordinaten ausgedrückt die unendlich ferne Gerade der Ebene ergiebt

Fig 7.



Wählen wir dagegen den Punkt O in der unendlich

ferner Ebenen selbst, so geht der von ihm auslaufende absolute Kegel über in eine doppelt zählende Ebene, die unendlich ferne Ebene selbst, oder in Ebenenkoordinaten ausgedrückt in ein Strahlenpaar, nämlich die beiden Tangenten von O' an den Kugelkreis. Denn diese werden durch die Tangentialebenen des degenerierten Kegels umhüllt. Wenn wir endlich nicht mit einer beliebigen Ebene den Kugelkreis schneiden, sondern mit der unendlich fernen Ebene, so haben wir wieder einen eigentlichen Kegelschnitt, nämlich den Kugelkreis selbst.

Wir können auf Grund dieser Verhältnisse sagen:

„Der tiefere Grund unserer Sätze liegt darin, dass wir als fundamentales Gebilde ein nicht specialisiertes Gebilde der zweiten Ordnung haben, sobald wir entweder von einem Punkte des Endlichen aus den Kugelkreis projicieren, oder die unendlich weite Ebene selbst wählen, während wir ein einfach specialisiertes Gebilde zweiten Grades erhalten (Punktepaar, Strahlenpaar), wenn wir den Kugelkreis entweder mit einer das Endliche durchziehenden Ebene schneiden oder von einem unendlich weiten Punkte aus projicieren."

Wenn nun die durch das Endliche laufende Ebene den Kugelkreis berührt — eine solche Ebene ist zwar imaginär, doch hindert dies ja gar nicht, besonders bei der Betrachtung analytischer Formeln — was wird dann für eine Maassbestimmung stattfinden? Analog können wir fragen, was eintritt, wenn wir den Punkt im Unendlichen auf dem Kugelkreise selbst wählen. Doch wollen wir uns darauf beschränken, diese Fragen aufgeworfen zu haben.

Dem Falle, wo bei der Metrik im Punkte letzterer ins Unendliche rückt, entspricht in der elementare Sprache, daß die sphärische Geometrie auf eine Kugel mit unendlich werdendem Radius angewendet wird, wodurch die Kugel in eine Ebene übergeht.

„Der Bemerkung entsprechend, die über die Maassbestimmung in einem unendlich weiten Punkte gemacht wurde, geht die sphärische Geometrie resp. die sphärische Trigonometrie in die gewöhnliche ebene Geometrie resp. Trigonometrie über, wenn man den Radius R unendlich groß werden läßt."

Dies wollen wir noch ausdrücklich nachweisen:

Gemäss den Formeln:

$$\sin. x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots\cdots ,$$

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \cdots\cdots$$ haben wir, indem wir uns auf kleine Grössen der zweiten Ordnung beschränken, zu setzen für:

$$\lim_{R=\infty} \sin. \frac{A}{R} = \frac{A}{R} ;$$

und $$\lim_{R=\infty} \cos. \frac{A}{R} = 1 - \frac{A^2}{2R^2} ;$$

Es wird dann aus unseren Formeln auf pag. 30

I. $A : B = \sin. \alpha : \sin \beta .$; [Sinussatz]

II. $$1 - \frac{A^2}{2R^2} = 1 - \frac{B^2}{2R^2} - \frac{C^2}{2R^2} + \frac{B}{R} \cdot \frac{C}{R} \cdot \cos. \alpha ;$$

oder vereinfacht:

$$\cos. \alpha = \frac{B^2 + C^2 - A^2}{2BC} ;$$ [Cosinussatz oder verallgemeinerter Pythagoras.].

Die Formel III führt auf die Relation:

$$tg. \beta = \frac{B. \sin. \alpha}{C - B \cos. \alpha} ,$$ welche sich als mit Formel I übereinstimmend ergiebt. Die Formel II endlich führt zu der Gleichung:

$\cos. \alpha = - \cos. (\beta + \gamma)$, woraus folgt, dass

$\alpha + \beta + \gamma = 2R$ ist

Wir wollen nun die Wahrheit des Satzes bestätigen:

„Metrische Beziehungen in der Ebene und im Punkte sind projective Beziehungen der vorgelegten Figur zu dem System der beiden Kreispunkte bez. zum absoluten Kegel."

Um dies darzuthun, wollen wir die einzelnen Formeln, wie wir sie von pag. 6. beginnend aufgestellt haben, nach einander hierauf prüfen. Wir beginnen mit der Formel für den Abstand zweier Punkte:

$$r = \frac{\sqrt{(xt' - x't)^2 + (yt' - y't)^2}}{t \cdot t'}$$

. Wir wollen uns vor allen Dingen fragen, was es projectivisch bedeutet, wir wir die einzelnen Teile der rechten Seite gleich 0 setzen?

Zunächst bedeutet $t = 0$ resp. $t' = 0$, dass der erste resp. zweite Punkt auf der unendlich weiten Geraden, d. h. auf der Verbindungsgeraden der Kreispunkte liegt. Doch was bedeutet der Zähler gleich 0 gesetzt?

Wir behaupten, es wird hierdurch ausgedrückt, daß die Punkte X und X', mit einander verbunden eine Verbindungslinie geben, die durch den einen

oder anderen der Kreispunkte hindurchgeht. Wir erkennen dies sofort, wenn wir den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen umformen:

Es ist nämlich:

$$o = \sqrt{(xt'-x't)^2+(yt'-y't)^2} = \sqrt{[(xt'-x't)+i(yt'-y't)]\cdot[(xt'-x't)-i(yt'-y't)]}$$

oder noch übersichtlicher die einzelnen Factoren als Determinanten geschrieben:

$$o = \sqrt{\begin{vmatrix} x & y & t \\ x' & y' & t' \\ i & -1 & o \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & y & t \\ x' & y' & t' \\ -i & -1 & o \end{vmatrix}}$$

Da $i, -1, o$ resp. $-i, -1, o$ die Coordinaten der Kreispunkte sind, so sagt jede der beiden Determinanten, gleich o gesetzt, aus, dass die gegebenen Punkte x und x' mit dem einen resp. dem anderen Kreispunkte auf einer geraden Linie liegen.

Wir bringen dies noch deutlicher zum Ausdruck, wenn wir uns einmal eine Coordinatenbestimmung denken, in welcher die beiden gegebenen Punkte die Coordinaten x_1, x_2, x_3 resp. x_1', x_2', x_3', und die beiden Kreispunkte die Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3, resp. ξ_1', ξ_2', ξ_3', haben. Dann können wir den Abstand der

beiden gegebenen Punkte x und x' schreiben.:

$$x = \frac{c \cdot \sqrt{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ \xi_1' & \xi_2' & \xi_3' \end{vmatrix}}}{(x, \xi, \xi') \cdot (x' \xi \xi')}$$

Es ist ein konstanter Factor c hinzugefügt, da die Formel von den absoluten Werten der homogenen Coordinaten ξ, ξ' abhängt, die beliebig gewählt werden können. Wir haben so einen Ausdruck erhalten, der durchaus nach den Regeln der projektiven Geometrie gebildet ist.

„ Die so geschriebene Formel lässt nun in deutlichster Weise erkennen, dass es sich bei dem Abstande x um eine von den 4 Punkten x, x', ξ, ξ' abhängige Funktion handelt, welche bei projectiven Umformungen ihre Bedeutung behält."

Denn die Determinanten des Zählers gleich 0 gesetzt, drücken aus, dass die 3 Punkte x, x', ξ, resp. x, x', ξ' in gerader Linie liegen, die Determinanten

des Nenners dagegen gleich 0 gesetzt, dass x, ξ, ξ' resp. x', ξ, ξ' auf derselben Geraden liegen. Dies sind lauter Eigenschaften von einem bei projectiven Umformungen unzerstörbaren Charakter.

Wir wollen dies noch ausführlicher nachweisen. Zunächst jedoch werden wir unsere Formel zweckmässig von dem willkürlichen constanten Factor c befreien.

Dieser Factor c war hinzugetreten, um jenen Umstand auszugleichen, dass im Zähler der Formel die homogenen Variabeln ξ und ebenso ξ' nur in der Dimension $\frac{1}{2}$, im Nenner dagegen je in der Dimension 2 vor-kommen. Wir beseitigen ihn dadurch, dass wir noch irgend zwei andere Punkte mit den Coordinaten a und a' hinzunehmen, die den Abstand 1 von einander haben sollen. Es kommt dies darauf hinaus, dass wir eine bestimmte Strecke als Längeneinheit wählen. Denn ist

$$1 = \frac{c\sqrt{(aa'\xi)\cdot(aa'\xi')}}{(a\xi\xi')(a'\xi\xi')},$$

Eliminieren wir mit Hülfe dieser Gleichung die Konstante c aus unserer Formel für den

Abstand r, so erhalten wir:

$$r = \frac{\sqrt{(xx'\xi)(xx'\xi')(a\xi\xi')(a'\xi\xi')}}{\sqrt{(aa'\xi)(aa'\xi')}\cdot(x\xi\xi')(x'\xi\xi')};$$

„Um also eine Definition des r zu haben, welche in allen vorkommenden Reihen homogener Variabler wie es doch bei jedem Ausdrucke von geometrischer Bedeutung sein muss, 0ter Dimension ist, werden wir neben den beiden Kreispunkten ξ, ξ' noch zwei Hülfspunkte a und a' einführen, deren Entfernung wir gleich 1 setzen, und dann den zuletzt aufgestellten Ausdruck konstruieren."

Jetzt wollen wir dazu übergehen, genauer nachzuweisen, dass wir es wirklich mit einem projectiven Ausdruck zu thun haben. Wir werden dies dargethan haben, wenn wir zeigen, dass bei projectiven Umformungen der Wert der Formel durchaus unverändert bleibt.

Wenn wir irgendwie unsere Ebene projicieren, so entsteht aus dem Punkte x ein Punkt y, dessen Coordinaten durch die Substitutionsformeln

gegeben sind:

$$y_1 = a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 ;$$
$$y_2 = a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 ;$$
$$y_3 = a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 .$$

wo die Determinante Δ der Substitution der Bedingung genügen wird: $\Delta = |a_{ik}| \gtrless 0$;

Entsprechend entstehen aus den Punkten x', ξ, ξ', a, a' Punkte $y', \eta, \eta, \eta', b, b'$, deren Coordinaten analoge Gleichungen befriedigen. Es sind eben alle Coordinaten der Punkte cogrediente Variabele. Wir denken uns jetzt einen analogen Ausdruck für r wie pag 40 auch für die neue Figur gebildet. Derselbe wird lauten:

$$r = \frac{\sqrt{(yy'\eta)(yy'\eta')} \cdot (b\eta\eta') \cdot (b'\eta\eta')}{\sqrt{(bb'\eta)(bb'\eta')} \cdot (y\eta\eta')(y'\eta\eta')}$$

Diesen Ausdruck wollen wir nun vermittelst unserer Substitutionsgleichungen umformen.

Was wird zunächst aus der Determinante $(yy'\eta)$, wenn wir die Substitutionen einsetzen?

Es ist:

$$(xx'\xi\eta) = \begin{vmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 ; & a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 ; & a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 ; \\ a_{11}x'_1+a_{12}x'_2+a_{13}x'_3 ; & a_{21}x'_1+a_{22}x'_2+a_{23}x'_3 ; & a_{31}x'_1+a_{32}x'_2+a_{33}x'_3 ; \\ a_{11}\xi_1+a_{12}\xi_2+a_{13}\xi_3 ; & a_{21}\xi_1+a_{22}\xi_2+a_{23}\xi_3 ; & a_{31}\xi_1+a_{32}\xi_2+a_{33}\xi_3 . \end{vmatrix}$$

Nun ist aber vermöge des Produktensatzes zweier Determinanten der letzte Ausdruck gleich:

$= \Delta \cdot (x\,x'\,\xi)$. d. h. gleich dem Produkt der Substitutionsdeterminante und der Determinante der $x\,x'$ und ξ. Entsprechendes gilt für die übrigen Determinanten des neuen Ausdrucks für $\mathfrak{X}$. Setzen wir dann die so umgeformten Werthe der Determinanten in letzteren ein, so erkennen wir leicht unsere Behauptung:

„In der That erweist sich der Ausdruck für $\mathfrak{X}$ gegenüber beliebiger Projection der von den 6 Punkten gebildeten Figur als durchaus unveränderlich, indem nämlich bei linearer Substitution der Variabeln jede dreigliedrige Determinante sich bis auf den Faktor Δ reproduciert, dabei aber im Zähler und Nenner des Ausdrucks $\mathfrak{X}$ gleich viele solche Determinanten auftreten.

Hiermit ist unsere Untersuchung über den Abstand zweier Punkte abgeschlossen; wir wollen jetzt gleich dazu übergehen, die Formeln für den Winkel, den zwei Gerade miteinander bilden, als projective Beziehungen zu den Kreispunkten nachzuweisen.

Unsere Betrachtung wird der vorigen analog sein, doch insofern eleganter, als wir nicht genötigt sein werden, noch irgend welche Hülfsgrössen wie vorhin die Punkte a und a' einzuführen, wir werden aber mit den Kreispunkten allein ausreichen. Es liegt dies daran, dass die Functionen eines Winkels blosse Zahlengrössen sind, dass es zu ihrer Festlegung also nicht mehr nötig ist, irgend welche Strecke als Längeneinheit einzuführen.

Es war nach pag. 9.

$$\cos.\omega = \frac{uu' + vv'}{\sqrt{(u^2+v^2)(u'^2+v'^2)}} \text{ und } \sin.\omega = \frac{uv' - u'v}{\sqrt{(u^2+v^2)(u'^2+v'^2)}},$$

Wir können unsere folgende Betrachtung in 4 Abschnitte gliedern:

1. Fragen wir uns zunächst wieder, welche geometrische

Bedeutung die einzelnen Teile der Formeln haben, wenn wir sie gleich 0 setzen.

Was heisst es also:

$u^2 + v^2 = 0$,

$uu' + vv' = 0$,

$uv' - u'v = 0$? Wir sehen sofort, daß alle diese Gleichungen Beziehungen zu den Kreispunkten aus= drücken.

Die erste Gleichung ist geradezu die Gleichung der Kreispunkte in Liniencoordinaten.

Die zweite Gleichung entsteht aus der Gleichung der Kreispunkte, wenn wir dieselbe polarisieren. Es besagt dies daher, daß die Geraden mit den Coor= dinaten u, v, w und u', v', w' zu einander in bezug auf die Kreispunkte conjugiert sind, d.h. in der ge= wöhnlichen Sprache, daß sie auf einander senkrecht stehen.

Die dritte Gleichung $uv' - u'v = 0$ endlich giebt an, daß die Linien parallel sind, d.h. sich auf der unendlich weiten Geraden, der Verbindungslinie der Kreispunkte schneiden.

2. Wir wollen jetzt statt des rechtwinkligen ein beliebiges Dreieckscoordinatensystem einführen, um die gerade bezeichneten Verhältnisse klarer hervortreten zu lassen. Es seien die Coordinaten der Strahlen dann $u_1 u_2 u_3$ und $u_1' u_2' u_3'$; die der beiden Kreis-punkte $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ und $\xi_1' \xi_2' \xi_3'$.

Wie stellen sich nun unsere einzelnen Ausdrücke dementsprechend dar?

Aus $u^2 + v^2 = 0$ wird werden: $u_\xi \cdot u_{\xi'}$. Denn $u_\xi = 0$ ist die Bedingung, daß die Linie durch den einen Kreispunkt läuft, entspr. $u_{\xi'} = 0$, daß sie durch den zweiten Kreispunkt geht.

Wie drückt sich ferner jetzt $uu' + vv'$, die Bedingung, daß die beiden Linien zu den Kreispunkten konjugiert sind, aus? Es kommt diese Forderung bekanntlich darauf hinaus, daß die beiden Linien mit den Verbindungslinien ihres Schnittpunktes mit den Kreispunkten ein harmonisches Quadrupel bilden. Eine beliebige Linie durch den Schnitt von u und u' hat nun die Gleichung: $u_x + \lambda u_x' = 0$. Soll dieselbe durch den einen, resp. den anderen

Kreispunkt gehen, so muss λ entspr. der Bedingung genügen:

$u_\xi + \lambda_1 u'_\xi = 0$ oder $u_{\xi_1} + \lambda_2 u'_{\xi_1} = 0$. Hieraus findet sich:

$$\lambda_1 = -\frac{u_\xi}{u'_\xi}\ ;\ \lambda_2 = -\frac{u_{\xi_1}}{u'_{\xi_1}}.$$

Da nun die vier Strahlen $u_\lambda = 0$, $u'_x = 0$, $u_x + \lambda_1 u'_x = 0$, $u_x + \lambda_2 u'_x = 0$ harmonische Lage haben sollen, so muss das Doppelverhältniss $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1$ sein. Nach Einsetzung der Werte von λ_1 und λ_2 erhalten wir dann:

$u_\xi u'_{\xi_1} + u'_\xi \cdot u_{\xi_1} = 0$ als unsere gesuchte Bedingung.

Endlich haben wir noch $uv' - u'v = 0$, die Bedingung der Parallelität beider Linien, im neuen Coordinatensystem auszudrücken.

Es ist wieder:

$u_x + \lambda u'_x = 0$ eine Gerade durch den Schnitt von $u_x = 0$ und $u'_x = 0$. Nun verlangt die Parallelität der beiden Linien, dass die Verbindungslinie des Schnittpunktes mit den beiden Kreispunkten dieselbe Gerade, nämlich die unendlich ferne Gerade, darstellt. Es muss

sich also aus den Gleichungen: $u_\xi + \lambda u'_\xi = 0$ und $u_{\xi'} + \lambda u'_{\xi'} = 0$ derselbe Wert des λ ergeben. Die Elimination von λ aus beiden Gleichungen bietet uns daher die Bedingung der Parallelität beider Linien in der Form:

$$u_\xi \cdot u'_{\xi'} - u_{\xi'} \cdot u'_\xi = 0$$

Hiermit haben wir die drei Gleichungen in λ sämmtlich in eine allgemeinere Form gebracht.

3.) Setzen wir unsere so erhaltenen Ausdrücke in die Formeln für cos. w und sin. w an Stelle der früheren ein, so wird:

$$\cos w = k \frac{u_\xi u'_{\xi'} + u'_\xi u_{\xi'}}{\sqrt{u_\xi u_{\xi'} \cdot u'_\xi \cdot u'_{\xi'}}} \quad \text{und} \quad \sin w = l \frac{u_\xi u'_{\xi'} - u'_\xi u_{\xi'}}{\sqrt{u_\xi u_{\xi'} \cdot u'_\xi u'_{\xi'}}}$$

Wir haben in diesen beiden Formeln noch einen Konstanten Faktor k resp. l hinzuzufügen müssen, da unsere einzelnen Ausdrücke den alten ja nur gleich 0 gesetzt entsprachen.

Wir bestimmen diese Konstanten, indem wir zu den speciellen Verhältnissen des rechtwinkligen Coordinatensystemes zurückgehen.

Setzen wir für ξ ein $1,\ i,\ \sigma$
für ξ' $\quad 1, -i,\ \sigma,$

dann verwandelt sich der Ausdruck für cos w
in $\cos.w = k\,\dfrac{(u_1+iu_2)(u_1'-iu_2')+(u_1-iu_2)(u_1'+iu_2')}{\sqrt{(u_1^2+u_2^2)(u_1'^2+u_2'^2)}}$

Wenn wir den Zähler zusammenziehen, so wird dieser gleich $2(u_1u_1' + u_2u_2')$. Es wird daher unsere Formel mit der alten stimmen, wenn wir $k = \frac{1}{2}$ nehmen.

Entsprechend erhalten wir zur Bestimmung von l:

$$\sin.w = l.\,\frac{(u_1+iu_2)(u_1'-iu_2')-(u_1-iu_2)(u_1'+iu_2')}{\sqrt{(u_1^2+u_2^2)(u_1'^2+u_2'^2)}}$$

Ziehen wir jetzt den Zähler zusammen, so erhalten wir $-2i(u_1u_2' - u_2u_1')$. Durch Vergleichung mit der alten Formel ergiebt sich dann: $l = -\frac{1}{2i} = \frac{i}{2}$

Es ist also schliesslich:

$$3.)\ \cos.w = \frac{1}{2}\,\frac{u_\xi u_\xi' + u_\xi' u_\xi}{\sqrt{u_\xi u_\xi' \cdot u_\xi' u_\xi'}}\ ;\quad \sin.w = \frac{i}{2}\,\frac{u_\xi u_\xi' - u_\xi' u_\xi}{\sqrt{u_\xi u_\xi' \cdot u_\xi' u_\xi'}}.$$

Diese Formeln 3) definieren uns den cos. und sin. eines Winkels unter Zugrundelegung eines allgemeinen

Coordinatensystems."

Hieran knüpfen wir:

4) als Schluss den Nachweis der Invarianz der Formeln 3 bei projektiver Umformung.

Wenn wir irgend eine Projektion unseres Coordinatensystems vornehmen, so gehen die Coordinaten u, u', ξ, ξ' entspr. über in v, v', η, η'. Dann werden auch unsere Ausdrücke in die entsprechenden Ausdrücke übergehen, die sich genau so aus den v, v', η, η' zusammensetzen, wie die ursprünglichen aus den u, u', ξ, ξ'. Denn die einzelnen Teile haben die Form u_ξ, die wegen der Contragredienz der Variabelen u und ξ, wie früher gezeigt, unmittelbar gleich v_η wird ohne jeden hinzutretenden Faktor.

Wir haben so das Ergebniss:

" Mit den Formeln 3 sind cos. w und sin. w als absolute Invarianten derjenigen Figur definiert, die von den beiden geraden Linien u und u' und den beiden Kreispunkten ξ und ξ' gebildet ist."

Jetzt wollen wir jedoch dieser Frage noch eine andere Wendung geben. Wenn wir zwei Linien u und u' haben und zwei Punkte ξ und ξ'; so liegt es sehr nahe, nach den Punkten ξ und ξ', von dem Schnitt der Linien aus Gerade zu ziehen und das Doppelverhältniss dieser 4 Strahlen zu bestimmen. Dies ist gewiss eine absolute Invariante.

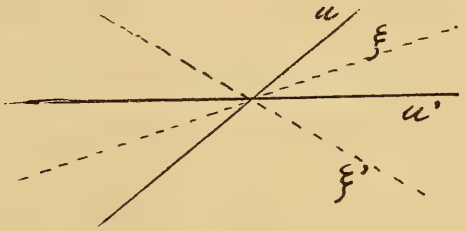


Fig. 8

Wir wollen nun fragen:

„Läßt sich spez. der Winkel α als eine Funktion des Doppelverhältnisses darstellen, welches die beiden Schenkelstrahlen mit den von der Winkelspitze nach den Kreispunkten hinlaufenden Linien bilden?"

Es wäre dies besonders denjenigen Geometern erwünscht, welche allein das Doppelverhältniss als Grundlage der projectivischen Beziehungen anwenden.

Diese berühmte Frage ist zuerst von Laguerre, einem französischen Mathematiker, der vor 2 Jahren

als Mitglied der Pariser Akademie verstorben ist, in einer Jugendarbeit vom Jahre 1853 gelöst*). Merkwürdigerweise hat man erst so spät dieser Untersuchung sich zugewandt. Es lag eben daran, dass die älteren projectiven Geometer sich an den Gedanken gewöhnt hatten, als ständen die metrischen Verhältnisse in keinerlei Beziehungen zu den projectivischen.

Die Arbeit Laguerre's befindet sich in den Nouvelles Annales de Math. t. 12 pag. 64. „Note sur la théorie des foyers." Wie gelangen wir nun zu dem Laguerre'schen Resultat? Wir wollen vor allem erst einmal das Doppelverhältnis der 4 Strahlen selbst berechnen. Durch eine ganz gleiche Betrachtung wie pag. 44 unten finden wir als Doppelverhältnis der vier Strahlen $u_x = 0;\ u'_x = 0;\ u_x + \lambda_1 u'_x = 0;\ u_x + \lambda_2 u'_x = 0.$

$$D.V. = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{u_\xi \cdot u'_\xi}{u_{\xi_0} \cdot u'_{\xi_0}}.$$ Jetzt ist die Frage, können wir vielleicht dieses Doppelverhältnis aus unseren cos. w und sin. w zusammensetzen? Bilden wir einmal: cos. w − i sin. w.

Wir erhalten vermöge der Formeln auf pag. 46.

*) Laguerre bezeichnet sich daselbst als „élève admis le quatrième à l'École Polytechnique.

$$\cos.\omega - i\sin.\omega = \frac{u_\xi . u'_\xi}{\sqrt{u_\xi . u_\xi . u'_\xi . u'_\xi}} = \sqrt{\frac{u_\xi . u'_\xi}{u_\xi . u_\xi}} = \sqrt{\mathfrak{D}\, v}.$$

Wir haben so das einfache merkwürdige Resultat gefunden:

„Der Zusammenhang zwischen dem Winkel ω und unserem Doppelverhältnis ist einfach der, dass $\cos.\omega - i\sin.\omega = \sqrt{\mathfrak{D}\, v}$ ist."

Nun können wir setzen:

$$\cos.\omega - i\sin.\omega = e^{-i\omega};$$

Dann wird: $e^{-i\omega} = \sqrt{\mathfrak{D}\, v}$ oder $-i\omega = \log.\sqrt{\mathfrak{D}\, v}$;

d. h. $\omega = \frac{i}{2}\log.\mathfrak{D}\, v.$

Dies ist das höchst einfache Resultat von Laguerre.

Es besagt:

Was man in der metrischen Geometrie als den Winkel zweier geraden Linien bezeichnet ist im Sinne unserer jetzigen Entwickelung gleich zu setzen $\frac{i}{2}$ mal dem log. des in der Figur ersichtlichen Doppelverhältnisses, womit dann der invariante Charakter, den wir der Maassbestimmung im Sinne der projectiven Geometrie beizulegen haben, ohne Weiteres hervortritt."

Wir wollen hieran noch einige Bemerkungen knüpfen, die die Uebereinstimmung der letzten Formel mit unseren sonstigen Vorstellungen darlegen sollen. Das in ihr vorkommende DV ist das Doppelverhältnis zweier reeller Elemente mit 2 konjugiert komplexen. Wir haben früher ein solches Doppelverhältnis einmal ausgerechnet, es hat sich gezeigt, daß der absolute Betrag desselben gleich 1 ist. Wir können daher setzen: $DV = e^{i\varphi}$? Unsere Formel ergiebt dann, da $\log. e^{i\varphi} = i\varphi$ ist, in der That für w einen reellen Wert, nämlich $w = -\frac{\varphi}{2}$. Dies ist gleichsam eine erste Controle für unsere Formel.

Eine zweite Controle bietet folgende weitere Betrachtung. Der log. ist bekanntlich eine unendlich vieldeutige Funktion. Aus einem einmal berechneten Wert (log) erhalten wir den allgemeinen Wert, wenn wir $2ki\pi$ hinzufügen, wo k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet. Es ist also: log. = (log.) + $2ki\pi$. Dies heisst dann für unseren Winkel: Wenn wir den Winkel w auf eine bestimmte Weise einmal = (w) berechnet

haben, so dürfen wir beliebig $-k\pi$ hinzufügen. Es ist also nach unserer neuen Definition der allgemeine Wert von $w = (w) - k.\pi$. Es stimmt dies vollkommen mit der bereits vielfach erwähnten Thatsache, dass der Winkel w, den zwei Strahlen mit einander bilden, die Periode π besitzt.

Nun wollen wir als eine letzte Controle unsere Formel auf den speciellen Fall anwenden, wo das Doppelverhältnis gleich -1 ist. Wir wissen, dass in diesem Falle die beiden Strahlen rechtwinklig zu einander sein müssen, da sie konjugiert sind in bezug auf die beiden Kreispunkte. Auch unsere Formel liefert dieses Ergebnis. Denn da $\log.(-1) = (2k+1)i\pi$ ist, so erhalten wir

$w = -\frac{2k+1}{2}.\pi = \frac{\pi}{2} - (k+1)\pi$, d.h. $\frac{\pi}{2}$, vermehrt um ein beliebiges ganzes Multiplum von π.

Wir wollen nun dazu übergehen, von der Maassbestimmung im Punkte zu sprechen. Wir werden hier jedoch der Kürze halber nur die eine Aufgabe behandeln, den Winkel zwischen zwei Strahlen xyz und $x'y'z'$ als

eine projective Beziehung zu dem absoluten Kegel darzulegen.

Es war:

$$\cos.\omega = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)}},$$

$$\sin.\omega = \frac{\sqrt{(yz'-y'z)^2+(zx'-z'x)^2+(xy'-x'y)^2}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)}}$$

Wir wollen nun an diese Formeln genau eine solche Discussion anknüpfen wie auf pag. 43 ff.

1.) Wir fragen zunächst wieder: Was bedeutet es geometrisch, wenn wir die einzelnen Ausdrücke der Formeln gleich 0 setzen?

Was heisst also:

$x^2+y^2+z^2=0$;

$xx'+yy'+zz'=0$;

$(yz'-y'z)^2+(zx'-z'x)^2+(xy'-x'y)^2=0$?

Wir werden sehen, dass alle drei Gleichungen Beziehungen zu dem absoluten Kegel ausdrücken.

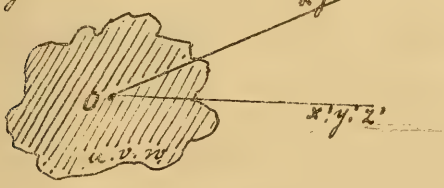
Die erste Gleichung ist unmittelbar die Gleichung des absoluten Kegels.

Die zweite Gleichung stellt die polarisierte Form der ersten dar, sie giebt also an, dass der Strahl xyz zu dem Strahl $x'y'z'$ konjugiert ist in Bezug auf den absoluten Kegel. (Senkrechtstehen beider Strahlen.)

Welche Beziehung drückt nun die dritte Gleichung aus?

Wenn wir durch die beiden Strahlen x und x' eine Ebene legen und die Coordinaten derselben berechnen, so werden diese gerade die Unterdeterminanten des Schemas $\left|\begin{matrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{matrix}\right|$ sein.

Fig. 9



Es wird also:

$$u = yz' - y'z\,;$$
$$v = zx' - z'x\,;$$
$$w = xy' - x'y\,;$$

Setzen wir dann für die Ausdrücke rechts die Coordinaten u, v, w in unsere dritte Gleichung ein, so geht diese über in: $u^2 + v^2 + w^2 = 0$. Diese Gleichung stellt aber den absoluten Kegel in Ebenencoordinaten dar. Unser dritter Ausdruck verschwindet also, wenn die Verbindungsebene der beiden Strahlen den absoluten Kegel (oder was dasselbe ist: den Kugelkreis) berührt.

Es hat sich also herausgestellt:

„Wenn wir die in unseren Formeln auftretenden Aus=drücke einzeln gleich 0 setzen, erhalten wir projective Beziehungen der Strahlen xyz und $x'y'z'$ zum absoluten Kegel."

Anm.: Wir wollen hierzu noch die folgende Identität aufstellen:

$$(yz'-y'z)^2+(zx'-z'x)^2+(xy'-x'y)^2=(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)-$$
$$-(xx'+yy'+zz')^2 .$$

Dieselbe ergiebt sich sehr einfach mit Hülfe unserer Formeln aus der Identität: $\sin.^2 w = 1-\cos.^2 w$.

2.) Wir wollen nun zu einem allgemeinen Dreikant=koordinatensystem übergehen. Den rechtwinkligen Coordinaten xyz, $x'y'z'$ mögen entsprechen die Dreikant=koordinaten x_1, x_2, x_3 resp. x_1', x_2', x_3'. Wie drücken sich nun die 3 Gleichungen unter 1 in diesen neuen Coordinaten aus? Der absolute Kegel wird sich jetzt schreiben: $\sum a_{ik} x_i x_k = 0 = \sum xx$,

wo $a_{ik} = a_{ki}$.

Wir haben uns hier einer bereits früher eingeführ=ten Abkürzung bedient.

Diese Gleichung polarisiert nimmt folgende

Formel an:

$$\sum a_{ik} \cdot x_i \cdot x'_k = \sigma = \sum_{xx'} .$$

(Früher haben wir mit $\sum_{xx'}$ die Form bezeichnet: $\sum a_{ik} (x_i x'_k + x'_i x_k)$, welche das Doppelte der unsrigen darstellt. Wir bemerken dies ausdrücklich, da unsere späteren Formeln etwas anders sich gestalten werden wie früher.)

Wir wollen nun drittens die Gleichung des absoluten Kegels in Ebenenkoordinaten bilden. Dies geschieht, indem wir die Determinante der a mit den Ebenenkoordinaten u_1, u_2, u_3 rändern. Doch wir wollen gleich für u_1, u_2, u_3 die Werte einsetzen, welche sich für die Verbindungsebene der beiden Strahlen ergeben, nämlich $u_1 = x_2 x'_3 - x_3 x'_2$; $u_2 = x_3 x'_1 - x_1 x'_3$; $u_3 = x_1 x'_2 - x_2 x'_1$. So erhalten wir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_2 x'_3 - x_3 x'_2 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & x_3 x'_1 - x_1 x'_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & x_1 x'_2 - x_2 x'_1 \\ x_1 x'_2 - x_2 x'_1 & x_2 x'_3 - x_3 x'_2 & x_3 x'_1 - x_1 x'_3 & 0 \end{vmatrix}$$

Dieser Ausdruck, gleich 0 gesetzt, giebt also an, daß die Verbindungsebene unserer Strahlen eine Erzeugende

des absoluten Kegels ist, d.h. denselben berührt. Wir bezeichnen den Ausdruck zur Abkürzung mit $S_{xx'}$.

3. Wenn wir die so gewonnenen Ausdrücke in unsere Formeln einsetzen, so erhalten wir:

$$\cos.\omega = k.\frac{\Sigma_{xx'}}{\sqrt{\Sigma_{xx}\cdot\Sigma_{x'x'}}} \quad ; \quad \sin.\omega = l.\frac{\sqrt{S_{xx'}}}{\sqrt{\Sigma_{xx}\cdot\Sigma_{x'x'}}}$$

unter k und l 2 zunächst noch unbekannte Faktoren verstanden, analog wie auf pag.

Wir bestimmen diese Faktoren, indem wir zu einem rechtwinkligen Coordinatensystem zurückgehen. Dann wird die Gleichung des absoluten Kegels:

$0 = \Sigma_{xx} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, oder $a_{ik} = 0$ für $i \geq k$, $a_{ik} = 1$ für $i = k$.

Entsprechend wird

$$\Sigma_{xx'} = x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3' .$$

Setzen wir diese Werte in unsere Formel für $\cos.\omega$ ein, so erkennen wir durch Vergleichung mit der Ausgangsform für $\cos.\omega$, dass wir k einfach gleich 1 zu setzen haben.

Dagegen stimmt $S_{xx'}$ in diesem spec. Falle nur bis

auf das Vorzeichen mit der entsprechenden Größe unter dem Wurzelzeichen unserer Ausgangsform für sin. ω überein. Wir haben daher den Factor l gleich i zu wählen.

Unsere Formeln nehmen also die Gestalt an:

$$\cos.\omega = \frac{\Sigma_{xx'}}{\sqrt{\Sigma_{xx'}\Sigma_{x'x'}}}\,; \text{ und } \sin.\omega = i.\frac{\sqrt{S_{xx'}}}{\sqrt{\Sigma_{xx'}\Sigma_{x'x'}}}$$

Anm. Bilden wir wieder $\sin.^2\omega = 1 - \cos.^2\omega$, so erhalten wir die Identität:

$$S_{xx'} = \Sigma_{xx'}^2 - \Sigma_{xx'}\Sigma_{x'x'}.$$

4.) Aus unseren letzten Formeln für cos. ω und sin. ω tritt der invariable Charakter derselben sofort hervor. Denn die einzelnen Ausdrücke S_{xx} und Σ_{xx}, $\Sigma_{x'x'}$ bedeuten = 0 gesetzt invariable Beziehungen zum absoluten Kegel, aus ihnen aber setzen sich cos. ω und sin. ω derart zusammen, daß sie homogen nullten Grades in den homogenen Coordinaten x und x' wie in den Coefficienten a_{ik} werden.

„Aus unseren Formeln geht also klar hervor, daß die Größen cos. ω und sin. ω projektive Beziehungen zwischen den Strahlen x, x' und dem absoluten

Kegel ausdrücken."

Wir wollen ferner wieder versuchen, den Winkel ω als Funktion eines Doppelverhältnisses zu definieren. Zu dem Zweck stellen wir uns wieder dar $\cos.\omega - i \sin.\omega$.

Es wird

$$\cos.\omega - i \sin.\omega = \frac{\Sigma_{xx'} + \sqrt{S_{xx'}}}{\sqrt{\Sigma_{xx} \cdot \Sigma_{x'x'}}}.$$ Wir setzen nun

auf Grund der unter obiger Anm. aufgestellten Identität für: $\Sigma_{xx'} \cdot \Sigma_{x'x'}$ ein

$\Sigma^2_{xx'} - S_{xx'}$. Wir erhalten so:

$$\cos.\omega - i \sin.\omega = \frac{\Sigma_{xx'} + \sqrt{S_{xx'}}}{\sqrt{\Sigma^2_{xx'} - S_{xx'}}} = \frac{\Sigma_{xx'} + \sqrt{S_{xx'}}}{\sqrt{(\Sigma_{xx} + \sqrt{S_{xx'}})(\Sigma_{xx'} - \sqrt{S_{xx'}})}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma_{xx'} + \sqrt{S_{xx'}}}{\Sigma_{xx'} - \sqrt{S_{xx'}}}}.$$ In diesen Ausdruck wollen wir noch $S_{xx'}$ ersetzen durch $\Sigma^2_{xx'} - \Sigma_{xx} \cdot \Sigma_{x'x'}$, so dass wir schliesslich bekommen:

$$e^{-i\omega} = \cos.\omega - i \sin.\omega = \sqrt{\frac{\Sigma_{xx'} + \sqrt{\Sigma^2_{xx'} - \Sigma_{xx} \cdot \Sigma_{x'x'}}}{\Sigma_{xx'} - \sqrt{\Sigma^2_{xx'} - \Sigma_{xx} \cdot \Sigma_{x'x'}}}}.$$

Wir werden uns jetzt erinnern, daß der Ausdruck unter dem Gesammtwurzelzeichen uns bereits bekannt ist und zwar eben als der Wert eines gewissen Doppelver-

hältnisses. Wir können daher schreiben:

$$e^{i\omega} = \sqrt{DV}\,; \quad \text{oder } \omega = \frac{i}{2} \log. DV.$$

Was war dies nun für ein charakteristisches Doppelverhältnis? Es ist dies sehr einfach darzulegen. Es seien zwei Strahlen x und x' und ein Gebilde 2. Classe $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$ gegeben. Betrachten wir dann in dem Strahlenbüschel $x + \lambda x'$ gerade die beiden Schnittstrahlen mit dem Kegel, so bilden diese mit den Strahlen x und x' das Doppelverhältnis DV.

Wir können daher unser Resultat zusammenfassend so ausdrücken:

„Als Winkel zweier Strahlen x, x', die durch unseren festen Punkt laufen, erscheint das Product von $\frac{i}{2}$ mal dem log. desjenigen Doppelverhältnisses, welches von den beiden Strahlen mit denjenigen beiden weiteren Strahlen gebildet wird, die die Verbindungsebene der beiden gegebenen Strahlen aus dem absoluten Kegel ausschneidet."

Wir wollen noch der Modification gedenken, die diese Formel annimmt, wenn wir auf der „Kugel" operieren, die um den festen Punkt gelegt ist. Die Kugel möge den Radius R haben, während wir mit Ω den Bogen der zu bestimmenden

sphärischen Seite darstellen wollen.

Es ist dann: $\Omega = \frac{Ri}{2} \log. DV.$

„Unsere Formel modificiert sich beim Übergange zur Kugel vom Radius R also nur dadurch, dass an Stelle des Factors $\frac{i}{2}$ jetzt $R.\frac{i}{2}$ eintritt."

Wir sind so zum Abschluss des 1. Kapitels gekommen, in dem es sich darum handelte, die metrischen Begriffe der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie in das System der projectiven Geometrie einzuordnen. Bei der Metrik der Ebene geschah dies mit Hülfe der imaginären Kreispunkte, bei der Metrik im Punkte mit Hülfe des absoluten Kegels. Wir wollen diesen Betrachtungen noch folgende Bemerkung, die Raumgeometrie betreffend, die wir bisher ausser Acht gelassen haben, hinzufügen:

„Entsprechend dem, was jetzt über Ebene und Punkt gesagt ist, wird alle Metrik im Raume auf projective Beziehung zum Kugelkreis hinauskommen, insbesondere wird jeder Winkel der Raumgeometrie als das Product von $\frac{i}{2}$ in den log. eines DV definiert werden können.

II.

Historische Bemerkung:

Diese Auffassung der metrischen Geometrie, die wir bisher besprochen haben, ist vor allem das Verdienst der französischen Schule.

Wir haben im ersten Theile dieser Vorlesung bereits öfter Poncelet erwähnt, dessen Fundamentalwerk 1822 erschienen war. Später hat sich jedoch Poncelet der technischen Mechanik gewidmet, wo er einer der gefeiertsten Forscher ist. [Er hat z.B. den Begriff der „Arbeit" konsequent in die Mechanik eingeführt.] Hierdurch ist er dazu gekommen, seine geometrischen Untersuchungen liegen zu lassen. Dann hat Chasles dieselben weiter geführt, besonders als er seit 1851 eine Professur der „Géométrie supérieure" an der Fakultät der Wissenschaften zu Paris erhielt. Dort hat er eine grosse Zahl von Schüler um sich versammelt. Es sind aus dieser „Schule" zu nennen Laguerre, Darboux und noch manche andere verdiente Männer. Diese französische Schule hat sich nun eben je länger, je mehr zu der Ansicht durchgearbeitet, dass die metrischen Untersuchungen durchaus nicht von den projectiven auszuschliessen seien, sondern dass es sich bei ihnen vielmehr nur um eine Beziehung zu einem speciellen Kegelschnitt, dem Kugelkreise, handle. Etwa um

1860 ist diese Ansicht allgemein geworden. Damit hatten die französischen Geometer einen Vorsprung vor den deutschen, welche damals noch streng zwischen metrischen und projectiven Beziehungen schieden. Wir haben uns nun zu einem neuen Kapitel zu wenden, welches wir überschreiben können:

Kapitel II. „Cayley's Maassgeometrie."

Bereits im ersten Theil unserer Vorlesung haben wir die Namen Cayley und Sylvester zu erwähnen gehabt, als es sich darum handelte, die Invariantentheorie als eine algebraische Verallgemeinerung der projectiven Geometrie zu betrachten.

Cayley hat nun seit der Mitte der 50. Jahre begonnen, in den Philosophical Transactions eine Reihe von Abhandlungen zu veröffentlichen, in welchen er die damaligen Resultate der Invariantentheorie zusammenfasst. Es sind dies 9 Abhandlungen unter der Überschrift: „Memoirs upon Quantics"*). Gerade auf die 6. Abhandlung wollen wir jetzt unsere Aufmerksamkeit richten. Dieselbe ist erschienen 1859.

In dieser 6. Abhandlung hat Cayley nun eben die Lehre von der Maassbestimmung von seinem eigenen Standpunkte aus beleuchtet. Er hat nicht gefragt, wie ordnen sich die in der Elementargeometrie gegebenen metrischen Verhältnisse in die pro-

*) „Quantic" = algebraische Form.

jective Geometrie ein, sondern er hat gleich eine allgemeine Theorie der Maassbestimmungen geschaffen, von der unsere bisher betrachteten Sätze nur specielle Fälle sind. Er hat gesagt: Möge einmal irgend ein Gebilde zweiten Grades angenommen sein; in Bezug auf dieses wollen wir nun den Begriff eines Winkels, einer Entfernung definieren und uns in die dann entstehenden neuen Verhältnisse hineindenken. Wenn man dann hinterher insbesondere den Kugelkreis als dieses fundamentale Gebilde 2ten Grades wählt, so erhalten wir unseren bekannten Fall. —

Cayley ist also weit souveräner aufgetreten als die französische Schule; er hat nicht gegebene Verhältnisse analysiert, sondern er hat sie in ein logisches System eingeordnet. Seine Betrachtungen ordnet er in 3 Theile, indem er betrachtet:

I. die Grundgebilde 1. Stufe.
II. die Grundgebilde 2. Stufe.
III. die Grundgebilde 3. Stufe.

Die ganze Theorie, wie sie sich so darbietet, wollen wir nun im Überblick kennen lernen, wobei wir uns übrigens einigermassen an die Darstellung von Bd. 4. der mathem. Annalen anlehnen.

Wir wollen nun auf Cayley's Maassgeometrie selbst eingehen.

Wir schliessen uns hierbei, um systematisch vorzugehen, der Eintheilung Cayley's an und betrachten daher zunächst:

I. Die Grundgebilde 1. Stufe.

Ein Element des Gebildes wird festgelegt durch die homogenen Coordinaten $x_1 : x_2$, mag $x_1 : x_2$ nun einen Punkt auf einer Geraden, oder einen Strahl im Büschel oder eine Ebene im Büschel bedeuten. Nun denken wir uns auf dem Grundgebilde durch eine quadratische Gleichung $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$ ein fundamentales Gebilde gegeben, welches wir auch fernerhin als „absolutes Gebilde" bezeichnen wollen. Wir führen zur Abkürzung noch ein $\Sigma_{xx} = \Sigma a_{ik} x_i x_k$ und bezeichnen dementsprechend mit $\Sigma_{xx'} = \Sigma a_{ik} x_i x_k'$ die Polarenbildung von $\Sigma a_{ik} x_i x_k$.

Wir werden nun von vorn herein folgende verschiedenen Fälle unterscheiden dürfen:

1. Der allgemeine Fall ist der, wo die Diskriminante von $\Sigma_{xx} = 0$ nicht verschwindet, wo also $\Sigma_{xx} = 0$ zwei verschiedene Wurzeln hat. Diese Möglichkeit zerlegt sich wieder in die Unterabtheilungen:

1a. die beiden Wurzeln der Gl. $\Sigma_{xx} = 0$ sind konjugiert imaginär:

1b. die beiden Wurzeln sind reell.

2. Der specielle Fall zweier gleichen Wurzeln. Derselbe tritt ein, wenn die Diskriminante von $\Sigma_{xx} = 0$ gleich 0 wird.

Wir wollen dementsprechend gleich 3 Benennungen verabreden; wir werden reden von 1a) einer elliptischen, 1b) einer hyperbolischen, 2) einer parabolischen Maassbestimmung auf einem Grundgebilde erster Stufe. Die Bedeutung dieser Bezeichnungen ist leicht einzusehen; sie ist den Beziehungen der Ellipse, Hyperbel und Parabel zur unendlich fernen Geraden entnommen. (– 2 imaginäre Schnittpunkte, 2 reelle, ein reeller Berührungspunkt. –)

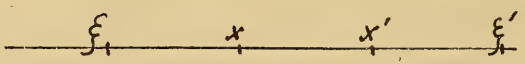
Wir wollen nun dazu übergehen, für irgend 2 Elemente X und X' unseres Grundgebildes einen Ausdruck festzulegen, den wir als den Maassunterschied derselben bezüglich des absoluten Gebildes anzusehen haben. Wir haben das Wort „Maassunterschied" gewählt, um gemeinsam die Bezeichnungen „Entfernung zweier Punkte, Winkel zweier Strahlen oder Ebenen", [Abstand zweier Punkte, Strahlen oder Ebenen] zu umfassen. Wir bezeichnen zur Abkürzung den Maassunterschied zweier Elemente dann mit $M(XX')$.

Was wollen wir nun unter dem Maassunterschied zweier Elemente in Bezug auf das absolute Gebilde verstehen?

Wir wollen einmal ein Doppelverhältnis bilden analog dem, das wir in der letzten Stunde (pag. 53) betrachtet haben. Der Einfachheit halber und, um eine bestimmte Vorstellung zu fixieren, wählen wir die gerade Linie als Grundgebilde. Genau dieselben Betrachtungen

gelten natürlich auch für das Strahlenbüschel und das Ebenenbüschel. Es sei durch ξ und ξ' das absolute Gebilde dargestellt, x und x' seien die Elemente, deren Maassunterschied zu bestimmen ist. Das Doppelverhältnis der 4 Punkte ist dann:

$$DV = \frac{(x\xi)\cdot(x'\xi')}{(x\xi')\cdot(x'\xi)}.$$



Figur. 10.

Dieses Doppelverhältnis wollen wir jetzt unserer Maassbestimmung zu Grunde legen. Wir definieren als Maassunterschied zweier Elemente in Bezug auf das absolute Gebilde den log. des eben aufgestellten Doppelverhältnisses, multipliciert mit einer zunächst noch beliebigen Konstante k. Es ist also:

$$\underline{M(xx') = k.\log.DV.}$$

Ehe wir nun dazu übergehen, dieses Maassverhältnis in unseren 3 Fällen näher zu discutieren, wollen wir noch vorerst die Frage aufwerfen, wie wir überhaupt, von einer logischen Ueberlegung ausgehend, gerade dazu kommen, den log. dieses Doppelverhältnisses in Betracht zu ziehen. Sollte es nicht viel näher liegen, das DV selber als das Maassverhältnis zu wählen? Es liegt dies an folgendem: Haben wir 3 Elemente, 1, 2, 3, so gilt für die bezüglichen Entfernungen in der elemen-

saren Geometrie das Gesetz, daß (12)+(23)=(13) ist, d.h. in Worten: Der Maassunterschied des ersten und zweiten Elementes, vermehrt um den des zweiten und dritten ist gleich dem Maassunterschied des ersten und dritten Elementes, mögen wir nun Punkte auf einer geraden Linie, 3 Strahlen eines Büschels oder 3 Ebenen eines Büschels betrachten. Wir können diese Beziehung auch so ausdrücken:

„Maassunterschiede, wie sie in der elementaren Geometrie auf einem Gebilde 1. Stufe auftreten, haben immer die Eigenschaft der Addierbarkeit."

Diese Eigenschaft der Addierbarkeit ist also mit dem Begriff des Messens wesentlich verbunden. Wenn wir daher eine allgemeine Theorie der Maassbestimmungen aufstellen wollen, so werden wir jedenfalls an diesem Princip der Addierbarkeit festhalten müssen. Sehen wir nun einmal zu, wie sich in Bezug hierauf das Doppelverhältnis selbst verhält, indem wir einmal das DV für x, x', dann für x, x'' und x, x'' bilden. Es ist:

$$\left.\begin{aligned} DV(xx')_1 &= \frac{(x\xi)\cdot(x'\xi')}{(x\xi')\cdot(x'\xi)}\,. \\ DV(x'x'')_2 &= \frac{(x'\xi)\cdot(x''\xi')}{(x'\xi')\cdot(x''\xi)}\,. \end{aligned}\right\} \quad DV(xx'')_3 = \frac{(x\xi)\cdot(x''\xi')}{(x\xi')\cdot(x''\xi)}\,.$$

Was für eine Beziehung besteht nun zwischen den 3

Doppelverhältnissen? Wir erkennen sofort ohne Rechnung, dass nicht $\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_3$, sondern vielmehr $\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_3$ ist. Wir sehen also, dass das dritte Doppelverhältnis nicht als Summe, sondern als Produkt der beiden ersten sich ergiebt. Das DV. selbst können wir daher als Grundlage für die Maassbestimmung nicht verwerten gemäss des Princips der Addierbarkeit. Vielmehr müssen wir eine Funktion F von DV. den Maassbestimmungen zu Grunde legen, die so zu wählen ist, dass:

$$F(\mathfrak{D}_1) + F(\mathfrak{D}_2) = F(\mathfrak{D}_3) \text{ ist}$$

So verstehen wir den Satz:

Bei unserer Definition wird statt anderer Funktionen des Doppelverhältnisses gerade der log. gebraucht, weil dieser log. die Eigenschaft der Addierbarkeit besitzt, die wir für alle Maassbestimmung auf Grundgebilden erster Stufe als charakteristisch ansehen."

Wir wollen nun die analytische Formel für den so definierten Maassunterschied aufstellen: Es ist

$$M(xx') = k \log \frac{\Sigma xx' + \sqrt{\Sigma^2_{xx'} - \Sigma_{xx} \cdot \Sigma_{x'x'}}}{\Sigma_{xx'} - \sqrt{\Sigma^2_{xx'} - \Sigma_{xx} \Sigma_{x'x'}}}$$

Denn der frühere Wert des Doppelverh. für ein ternäres Gebiet, gilt auch im binären Gebiet unverändert, wenn wir $x_3 = x'_3 = 0$ setzen.

Doch können wir auch, statt den log. zu gebrauchen, eine cos = und sin. = Formel aufstellen, indem wir unter Bezugnahme auf die Ausdrücke, die wir bei der gewöhnlichen Maassbestimmung im Punkte kennen lernten, jetzt, wo k eine beliebige Constante ist, nicht cos. M und sin. M, sondern cos $\frac{i\,M}{2k}$ und sin. $\frac{i\,M}{2k}$ berechnen. Es wird:

$$\cos.\frac{i\,M}{2k} = \frac{\Sigma xx'}{\sqrt{\Sigma xx \cdot \Sigma x'x'}}.$$

$$\sin.\frac{i\,M}{2k} = \frac{(1'x')\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Sigma xx \cdot \Sigma x'x'}},$$ unter Δ die Diskriminante von $\Sigma xx = 0$ verstanden.

Wir wollen jedoch auf diese Formeln nicht näher eingehen, wir haben sie nur der Vollständigkeit wegen angeführt, um an die Entwickelungen der vorigen Stunde zu erinnern.

Jetzt wollen wir dazu übergehen, uns in die Definition des Maassunterschiedes im ersten allgemeinen Falle, dem elliptischen Falle, lebhaft hineinzudenken.

§. 1. Elliptische Maassbestimmung. Dieser Betrachtung ist bereits gut vorgebaut durch die Entwickelungen der letzten Stunde.

Denn die Bestimmung des Winkels ω, den 2 Strahlen miteinander bilden, ist bereits ein specieller Fall der Untersuchungen, die wir jetzt anstellen wollen. Wir dürfen von vorn-

herein sagen: „Die elliptische Maassbestimmung ist uns bereits im Beispiele bekannt, indem die gewöhnliche Winkelbestimmung im Strahlbüschel den elliptischen Charakter hat, nur dass da unsere Constante k gleich $\frac{i}{2}$ gesetzt ist und das absolute Gebilde 2. Grades von vornherein festgelegt ist, nämlich durch die nach den Kreispunkten hingehenden Strahlen vorgestellt wird." An diesem Beispiele können wir gleich Einiges lernen:

1.) Wir werden gut thun: $k = ik'$ zu setzen, wo k' reell ist, damit nämlich reelle Elemente einen reellen Maass unterschied bekommen. Dies wird uns nicht überraschen, da wir bereits früher daran einmal haben, dass, wenn es sich um 2 reelle und 2 konjugirt imaginäre Elemente handelt, das Doppelverhältnis derselben gleich $e^{i\varphi}$ ist, also der log. desselben, mit k multiplicirt, gleich $ik\varphi$. Wenn dies aber etwas Reelles sein soll, so müssen wir $k = ik'$ nehmen.

2.) Haben wir dies eingesetzt, wie gross wird dann die ganze Länge der geraden Linie sein? Entsprechend dem Falle, dass die Winkelsumme im Strahlenbüschel gleich π ist, finden wir folgendes Ergebnis:

„Die Gesammtlänge der geraden Linie wird bei der elliptischen

Maassbestimmung endlich und zwar gleich $2k \cdot \pi$."

3) Drittes wollen wir noch konstatieren: Da der log eine unendlich vieldeutige Function ist mit der Periode $2ki\pi$, wo k eine positive oder negative ganze Zahl ist, so ergiebt sich sofort:

„Entsprechend diesem letzten Satze ist die Entfernung zweier Punkte einer geraden Linie im elliptischen Falle eine unendlich vieldeutige Function mit der Periode $2k\pi$."

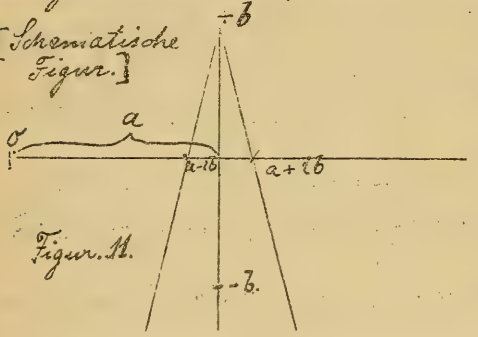
Wir wollen uns jetzt klar machen, daß jenes specielle Beispiel der elliptischen Bestimmung im Strahlbüschel uns gestattet, uns allgemein die elliptische Maassbestimmung auf der geraden Linie deutlich zu machen.

Wir betrachten $\frac{x_1}{x_2}$ als die Abscisse eines Punktes x. („Abscisse" im elementaren Sinne verstanden.) Dann können wir die beiden Wurzeln von $\Sigma_{xx} = 0$ $x = a + ib$ und $x = a - ib$. in gewöhnlicher Weise (nach Gauss) durch die Punkte der Ebene deuten, deren rechtwinklige Coordinaten $x = a$, $y = \pm b$ sind.

Nun müssen wir lernen, wie wir die Konstruktion dieser Punkte mit den imaginären Punkten $a \pm ib$ auf der geraden Linie auf die einfachste Weise in Verbindung setzen.

Früher haben wir uns zu diesem Zwecke eines Kreisbüschels bedient, wodurch auf der Geraden die elliptische Involution bestimmt wurde, deren Doppelpunkte die $a \pm ib$ sind. Jetzt wollen wir einen directen Weg wählen, indem wir uns der imaginären Kreispunkte bedienen. Wir behaupten, die geraden Linien von den Gauss'schen Punkten $a, \pm b$ nach den Kreispunkten schneiden die Abscissenaxe gerade in den Punkten $a \pm ib$. Es ist dies leicht nachzuweisen:

[Schematische Figur.]



Figur. 11.

$(x-a) = \lambda(y-b)$ ist die Gleichung einer beliebigen Geraden durch den Gauss'schen Punkt a, b. Soll dieselbe durch den einen oder anderen Kreispunkt gehen, so muß sie erfüllt sein für $\lambda = \pm i$. Wir erhalten also: $(x-a) = \pm i(y-b)$ als die Gl. der geraden Linien nach den Kreispunkten. Um die Schnittpunkte dieser Linien mit der Abscissenaxe zu finden, setzen wir $y = 0$ und erhalten $x = a \pm ib$, wodurch unsere Behauptung erwiesen ist. Zu demselben Resultat wären wir natürlich gekommen, wenn wir vom Gauss'schen Punkte $a, -b$. ausgegangen wären. Danach können wir umgekehrt jetzt die Gauss'schen Bildpunkte deuten, wodurch dieselben

endgültig in die projective Geometrie eingeführt werden.

Folgendermassen:

„Um zu 2 konjugiert imaginären Punkten einer geraden Linie die Gaussischen Bildpunkte zu construiren, werden wir die beiden imaginären Punkte mit den beiden Kreispunkten durch 4 gerade Linien verbinden, die imaginär sind, und die Gaussischen Bildungspunkte sind dann die beiden reellen Punkte, in welchen sich die genannten 4 imaginären geraden Linien, (die paarweise konjugiert sind) kreuzen."

(v. die schematische Figur. 12)

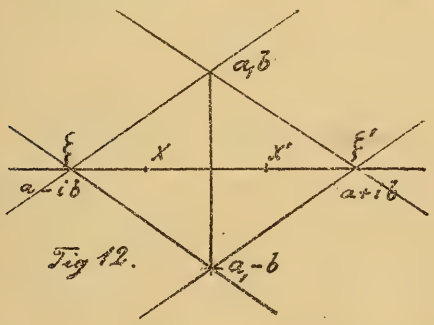


Fig 12.

Sind nun ξ und ξ' die konjugiert imaginären Punkte, die durch das absolute Gebilde $\Sigma_{xx} = 0$ definiert sind, so können wir offenbar nach dem Satze des Pappus das D V von x, x', ξ, ξ' ersetzen durch das Doppelverhältnis der 4 Strahlen, die von den Gaussischen Bildpunkten für ξ und ξ' nach den Punkten x, x' und den imaginären Kreispunkten hinlaufen. Unser $M(xx')$ ist dann gleich ik mal dem Logarithmus dieses neuen Doppelverhältnisses. Nun ist nachpag. 59. aber der Winkel der beiden reellen Strahlen, die nach

x, x' gehen, definiert durch:

$\frac{1}{2} w = \frac{i}{2} \cdot \log . DV$, wo DV dasselbe Doppelverhältnis ist.

Wir bekommen so:

$M(xx') = 2k'w$, so daß wir den Werth von $M(xx')$ in der Figur direkt aus dem Werth des Winkels w ablesen können. Wir haben so das Resultat:

„Der Maassunterschied zweier Punkte der geraden Linie im elliptischen Falle ist hiernach einfach gleich dem Produkt von $2k'$ in den Winkel, welchen im elementaren Sinne die beiden Strahlen mit einander bilden, die nach den Punkten x und x' von dem Gaussischen Bildpunkte der Fundamentalpunkte ξ, ξ' hinlaufen."

Wenn wir uns nicht so genau, aber kürzer ausdrücken wollen, so können wir auch sagen:

Die elliptische Maassbestimmung auf der geraden Linie ist einfach ein geradliniger Schnitt der gewöhnlichen Winkelbestimmung im Strahlbüschel."

„Hierdurch wird es jetzt auch deutlich, warum die Gesammtlänge der Linie gleich $2k'\pi$ wird."

Wir gehen nun über zu der

§ 2. hyperbolischen Maassbestimmung. Es sind in diesem Falle die Wurzeln ξ, ξ' der Gl.

$\Sigma_{xx} = 0$, die das absolute Gebilde darstellt, reell. Wir wollen wieder den speciellen Fall der geraden Linie bevorzugen, um eine bestimmte Vorstellung zu fixieren. Unsere Resultate sind später ohne Weiteres leicht auf das Strahlbüschel und das Ebenenbüschel zu übertragen.

Fig. 13.

Wenn die Punkte x und x', deren Abstand zu bestimmen ist, durch ξ und ξ' nicht getrennt werden (v. Fig 13ª) also entweder beide ausserhalb oder beide innerhalb von ξ, ξ' liegen, so ist das unserer Definition zu Grunde liegende

$$D\,V = \frac{(x\xi)(x'\xi')}{(x\xi')(x'\xi)}$$

jedenfalls grösser als 0; sind die Punkte x und x'' aber durch ξ und ξ' getrennt, so ist das $D\,V$ negativ. Diesen Umstand haben wir wohl zu beachten. Denn wenn wir jetzt den log. $D\,V$ bilden so wird derselbe im ersten Falle reell, im zweiten dagegen komplex sein. Wir bestimmen, dass wenigstens im ersten Falle etwas Reelles herauskommt. Daher setzen wir k gleich einer reellen Grösse. Wir fassen dies mit den Worten zusammen:

„ k soll eine reelle Constante sein, so dass 2 Punkte

welche durch ξ und ξ' nicht getrennt werden, einen reellen Mass unterschied erhalten, zwei Punkte dagegen, welche getrennt werden allerdings einen komplexen."

Wir fügen diesem Satze noch Folgendes hinzu: Der log. ist eine unendlich vieldeutige Funktion von der Periode $2\,k\,i\,\pi$; also hat auch unser Mass unterschied die Periode $2\,k\,i\,\pi$. Es folgt hieraus sofort:

„Indem wir den Mass unterschied zweier Punkte x und x' desselben Segmentes als eine reelle Grösse bezeichnen, ist er dadurch eindeutig festgelegt, denn er könnte nur um reelle Multipla von $2\,i\,\pi$ verändert werden."

Hierin besteht, wie man sieht, ein wesentlicher Unterschied gegen die elliptische Mass bestimmung, deren Periode eine reelle ist.

Wir fragen nun weiter, welche Entfernung hat der Punkt ξ oder ξ' von x? Lassen wir x' nach ξ wandern, so erhalten wir.

$$DV = \frac{(x\xi)(x'\xi')}{(x\xi')(x'\xi)} = \infty.$$ Wandert andererseits x' nach ξ', so werden wir erhalten.

$$DV = \frac{(x\xi)(x'\xi')}{(x\xi')(x'\xi)} = 0.$$

Wenn wir nun den log. DV bilden, so sehen wir, daß dieser im ersten Falle gleich $+\infty$, im zweiten gleich $-\infty$ wird. Da zur Bildung des Mass unterschiedes der log. DV nur noch

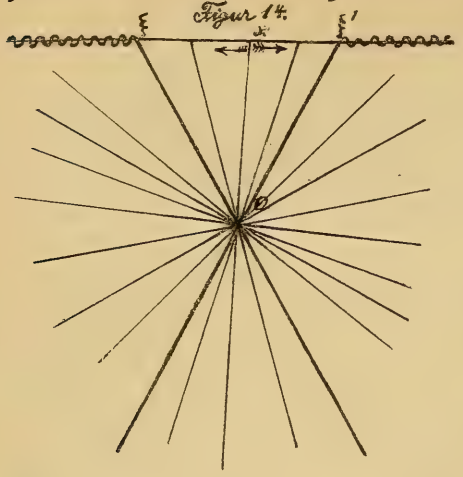
mit der reellen Konstanten k multiplizirt wird, so haben wir das Resultat:

" Unsere gerade Linie trägt jetzt 2 unendlich ferne Punkte, nämlich die Punkte ξ und ξ' haben eine ∞ grosse Entfernung vom beliebig gewählten Punkte x."

Nun wollen wir uns diese hyperbolische Maassbestimmung noch näher führen, indem wir uns vorstellen, dass wir uns etwa in der Mitte von ξξ' befänden und von hier aus nach dem Punkte ξ oder ξ' uns hinbewegten, doch so, dass wir in gleichen Zeiten hyperbolisch gleiche Strecken durchliefen. Um dann bis zu den Punkten ξ oder ξ' zu kommen, hätten wir eine unendlich grosse Wegstrecke zurückzulegen, wozu auch eine unendlich lange Zeit erforderlich wäre. Wir erkennen daher: Wenn wir uns von einem Punkte des Segmentes ξξ' nach beiden Seiten hin mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegen können, Geschwindigkeit im Sinne der hyperbolischen Maassbestimmung verstanden, so werden uns nur die sämmtlichen Punkte des genannten Segmentes erreichbar sein, die Punkte ξξ' aber werden eine unerreichbare Grenze vorstellen, und das darüber hinaus liegende Stück der geraden Linie wird als ein ideales, für die Bewegung durchaus nicht in Betracht kommendes Stück der geraden Linie zu

bezeichnen sein." (v. Figur 14.)

Figur 14.



Ein entsprechendes Ergebnis gilt für das Strahlbüschel, auf dem wir eine hyperbolische Maassbestimmung ins Auge fassen. Wenn wir uns dort, etwa im Punkte O stehend, im Sinne der hyperbolischen Maassbestimmung mit constanter Winkelgeschwindigkeit im einen oder anderen Sinne drehen, so werden wir die Richtung der Grenzstrahlen nie erreichen, trotzdem wir uns immer in demselben Sinne weiterbewegen, alle Strahlen darüber hinaus aber werden für uns deruhaus ideal, imaginär (dies Wort nicht im spez. mathematischen Sinne gedacht) sein.

Wir wollen nun weiter betrachten:

§3. die parabolische Maassbestimmung. Das zu Grunde liegende absolute Gebilde $\Sigma_{xx}=0$ liefert zwei gleiche Wurzeln, es besteht daher in nur einem, jedoch doppelt zählenden Element des Grundgebildes. Wir bevorzugen wieder der bestimmten Ausdrucksweise halber die gerade Linie. Da die Punkte ξ und ξ' zusammengefallen sind, so wird unser fundamentales Doppelverhältnis:

$$\mathfrak{D}\mathfrak{V}=\frac{(x\,\xi)(x'\,\xi')}{(x'\,\xi)(x\,\xi')} \qquad =1 \text{ werden, es sei denn, dass}$$

ausserdem auch x oder x' ebenfalls mit ξ zusammenfiele. Im letzteren Falle würden wir erhalten: $DV = \frac{\alpha}{\alpha}$, d.h. wir können dem Doppelverhältnis jeden beliebigen Wert ertheilen. Es folgt unmittelbar:

„Im parabolischen Falle wird, so fern wir die allgemeine Formel aufrecht erhalten wollen, der Abstand irgend zweier Punkte gleich 0, es sei denn, dass der eine oder der andere Punkt in den Fundamentalpunkt selbst hineinfällt, worauf der Abstand eine unbestimmte Grösse wird."

Wir sehen: mit einer solchen Maassbestimmung, wo alle Strecken gleich 0 oder unbestimmt werden, ist nichts anzufangen. Versuchen wir einmal, ob wir mehr Vernunft hineinbringen durch einen Grenzübergang. Wir werden zunächst den Punkt ξ' noch unendlich wenig von ξ verschieden sein lassen. Wir setzen daher: $\xi' = \xi + \varepsilon \xi_1$, d.h. ausführlich geschrieben:

$$\xi_1' = \xi_1 + \varepsilon \cdot \xi_1$$
$$\xi_2' = \xi_2 + \varepsilon \cdot \xi_2,$$ unter ε eine ∞ kleine Grösse verstanden.

ξ_1, ξ_2 werden wir als die Coordinaten eines beliebig angenommenen Punktes ansehen können.

Gleichzeitig wollen wir jedoch jetzt die Konstante k unendlich werden lassen; wir setzen $k = \frac{l}{\varepsilon}$, wo l eine endliche Grösse ist. Der Zweck dieser Festsetzungen ist, wie leicht voraus-

zuschen, folgender:

„Bei der Definition der parabolischen Maassbestimmung wollen wir jetzt von der ursprünglichen Definition abgehen und dafür anwenden den Grenzwerth:

$$M(xx') = \lim.\left(\frac{l}{\varepsilon}\log. D\mathcal{V}(x, \xi, x', \xi + \varepsilon\xi)\right) \text{ für } \varepsilon = 0.$$

Wie führen wir diesen Grenzübergang nun nach den Regeln der Analysis aus:

Aus dem $D\mathcal{V} = \frac{(x\xi)(x'\xi')}{(x\xi')(x'\xi)}$ wird zunächst, wenn wir für ξ' einsetzen $\xi + \varepsilon\xi$:

$$D\mathcal{V} = \frac{(x\xi)\cdot[(x'\xi) + \varepsilon(x'\xi)]}{[(x\xi) + \varepsilon(x\xi)]\cdot(x'\xi)}, \text{ oder wenn wir}$$

Zähler und Nenner durch die allein stehenden Determinanten dividieren: $D\mathcal{V} = \frac{\left[1 + \varepsilon\frac{(x'\xi)}{(x'\xi)}\right]}{\left[1 + \varepsilon\cdot\frac{(x\xi)}{(x\xi)}\right]}$. Bis hierher ist noch nichts vernachlässigt, doch wollen wir jetzt den Nenner nach Potenzen entwickeln und bei dem ersten Gliede abbrechen. Wir erhalten:

$$D\mathcal{V} = \left(1 + \varepsilon\frac{(x'\xi)}{(x'\xi)}\right)\cdot\left(1 - \varepsilon\frac{(x\xi)}{(x\xi)} - \ldots\ldots\right)$$

$$= 1 + \varepsilon\left(\frac{(x'\xi)}{(x'\xi)} - \frac{(x\xi)}{(x\xi)}\right) + \ldots\ldots$$

Wir haben bei dieser Rechnung nur die unendlich kleinen Glieder zweiter und höherer Ordnung fortgelassen.

Es giebt uns also $1 + \varepsilon\left(\frac{(x'\xi)}{(x'\xi)} - \frac{(x\xi)}{(x\xi)}\right)$ einen angenäherten Werth des Doppelverhältnisses.

Bilden wir nun den Logarithmus des DV. Da $\log.(1+a) = \frac{a}{1} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - + \ldots\ldots$ ist, so erhalten wir, wenn wir uns wieder auf Glieder erster Ordnung beschränken:

$\log. DV = \varepsilon\left(\frac{(x'\xi)}{(x'\xi)} - \frac{(x\xi)}{(x\xi)}\right)$. Wenn nun ε zu 0 wird, d.h. wenn wir den Punkt $\xi' = \xi + \varepsilon\xi$ mit dem Punkte ξ zusammenfallen lassen, so wird auch der $\log. DV$ gleich 0, was ja an sich völlig richtig ist. Doch ehe wir $\varepsilon = 0$ setzen, multiplizieren wir den $\log.$ mit der Konstanten $k = \frac{\varepsilon}{\varepsilon}$, die in demselben Maasse unendlich gross wird, als die zu multiplizierende Grösse unendlich klein wird. In dem Produkt fällt dann das ε heraus, und wir erhalten also den Grenzwert des Maassunterschiedes:

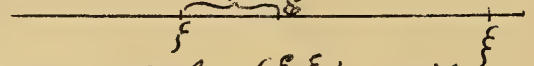
$M(xx') = k.\log. DV = \left[\frac{(x'\xi)}{(x'\xi)} - \frac{(x\xi)}{(x'\xi)}\right].l.$ Unser Resultat des Grenzüberganges ist dann:

Als den Maassunterschied $M(xx')$ definieren wir im parabolischen Falle den Ausdruck:

$$M(xx') = \left[\frac{(x'\xi)}{(x'\xi)} - \frac{(x\xi)}{(x\xi)}\right].l.$$

Wir wollen nun noch den Faktor l dadurch festlegen, dass wir einen Punkt E annehmen, der von ξ den Abstand 1 haben möge. Wir führen mit anderen Worten eine Längeneinheit ein, ein Schritt, der im elliptischen oder hyperbolischen

nicht nötig war. *) Wir wollen übrigens bemerken, daß wir die Punkte ξ, E, ξ bezw. den Nullpunkt, den Einheitspunkt, den Unendlichkeitspunkt der Maassbestimmung nennen können. Setzen wir nun für x und x' entspr. ξ und E in unsere Formel ein, so wird der Abstand 1: Figur 15.



$1 = \left[\frac{(E\,\xi)}{(E\,\xi)} - 0\right] \cdot l$, woraus sich $l = \frac{(E\,\xi)}{(E\,\xi)}$ ergiebt.

Unter Benutzung dieser Substitution geht dann die Ausdruck für den Maassunterschied über in:

$$M(x\,x') = \frac{(x'\xi)(E\,\xi)}{(x'\xi)(E\,\xi)} - \frac{(x\,\xi)(E\,\xi)}{(x\,\xi)(E\,\xi)}$$

Da jedes Glied rechts für sich ein Doppelverhältnis darstellt, so können wir schließlich schreiben:

$$M(x\,x') = (x', \xi, E, \xi) - (x, \xi, E, \xi).$$

In Worten lautet dieses Endergebnis:

„Der Maassunterschied von x und x' erscheint als die Differenz zweier Doppelverhältnisse, von denen das eine nur das x' enthält und ausserdem den Nullpunkt, Einheitspunkt und Unendlichkeitspunkt, das andere aber gerade so den Punkt x enthält und wieder den Nullpunkt, Einheitspunkt u. Unendlichkeitspunkt.

*) weil bei ihnen der Ausdruck des Maassunterschiedes in sämmtlichen Reihen in Betracht kommender Punktcoordinaten von vorneherein homogen nullter Dimension war.

Wir sind so zu einer Maassbestimmung geführt, die der gewöhnlichen Euklidischen ganz ähnlich ist. Wir können ja, was man im gewöhnlichen Sinne x nennt, auch schreiben: $(x, 0, 1, \infty)$, so dass der Abstand zweier Punkte der Abscissenaxe in der elementaren Geometrie, nämlich $x - x'$, gleich der Differenz zweier Doppelverhältnisse wird, ganz analog wie das M der parabolischen Maassbestimmung.

„Das gewöhnliche Maasssystem der geraden Linie, wie wir es in der elementaren oder Euklidischen Geometrie handhaben, ist daher ein specieller Fall der parabolischen Maassbestimmung, die wir hier betrachten." Wir erkennen sofort auch die Richtigkeit des Satzes:

„Der Maassunterschied im parabolischen Falle ist eine rationale Funktion der Coordinaten, daher durchaus eindeutig, überdies giebt es jetzt nur ein unendlich fernes Element x oder $x' = \xi$."

Hiermit wollen wir die Betrachtung der 3 Fälle der elliptischen, hyperbolischen und parabolischen Maassbestimmung schliessen.

Anmerkung: Nach dem Euklidischen System messen wir auf der geraden Linie parabolisch. Für eine solche fallen, wie wir gerade sahen, ξ und ξ' zusammen und k ist ∞ zu nehmen. Wenn wir jedoch die Fundamentalpunkte ganz wenig von einander verschieden sein lassen, wobei ξ und ξ' nach Belieben reell oder konjugiert imaginär sein mögen, und wenn wir ferner k noch nicht ∞, wohl aber sehr gross sein lassen, so haben wir eine hyperbolische bezw.

elliptische Maassbestimmung, die ein Stück lang von einer parabolischen Maassbestimmung nur unmerklich verschieden ist. Ist es nun wohl denkbar, dass unser gewöhnliches Messen auf der geraden Linie, welches doch nie über eine gewisse endliche Längenausdehnung hinausführt, nur scheinbar den parabolischen Charakter besässe, in Wirklichkeit aber hyperbolisch oder auch elliptisch wäre? Wir werfen diese Frage hier nur ganz vorläufig auf.

Wir betrachten jetzt weitergehend:

II. die Grundgebilde II. Stufe. Wie wir im binären Gebiet unseren Untersuchungen zumeist die gerade Linie zu Grunde gelegt hatten, so werden wir jetzt der bestimmteren Ausdrucksweise halber die Ebene bevorzugen. Unsere betreffenden Resultate lassen sich dann später natürlich ohne Weiteres auf die Geometrie in Punkte übertragen. Es sei durch $\sum x_{ik}\, x_i\, x_k = 0$ ein Kegelschnitt dargestellt, der in Liniencoordinaten durch $\sum A_{ik}\, u_i \cdot u_k = 0$ gegeben ist. Wir wählen denselben als den „absoluten Kegelschnitt" und wollen in Rücksicht auf ihn die allgemeine Maassbestimmung in der Ebene aufbauen.

Je nach der speciellen Art des absoluten Kegelschnittes werden wir 7 Arten der Maassbestimmung auseinander zu halten haben.

Es kann nämlich zunächst der Kegelschnitt:

1. ein allgemeiner Kegelschnitt sein.
2. entweder als Punkt- oder als Tangentengebilde einfach

spezialisiert sein.

3. sowohl als Punkt- wie als Tangentengebilde zweifach spezialisiert sein.

Die weitere Einteilung dieser 3 Hauptfälle in Unterabteilungen erfolgt durch Rücksichten auf die Verhältnisse im Reellen und wird folgende Zusammenstellung geben:

1. Ein allgemeiner Kegelschnitt.

1a. Derselbe ist nullteilig

1b. Derselbe ist einteilig

2. Ein entweder in Punktcoordinaten oder in Liniencoordinaten einfach spezialisierter Kegelschnitt.

2'. Ein Linienpaar, das uns zugleich als seinen Schnitt einen Doppelpunkt liefert, und zwar:

2'a.) Die Linien des Paares sind konjugiert imaginär,

2'b.) Die Linien sind reell.

Der Doppelpunkt ist natürlich in beiden Fällen reell.

2".) Ein Punktepaar, das uns zugleich als seine Verbindende eine Doppelgerade liefert, und zwar:

2"a.) Die Punkte des Paares sind konjugiert imaginär,

2"b.) Dieselben sind reell.

Die Doppelgerade ist wieder in beiden Fällen reell.

3. Ein sowohl in Punktcoordinaten, wie in Liniencoordinaten zweifach spezialisiertes Gebilde. Dasselbe besteht in einer

Doppelgeraden und einen Doppelpunkt. Beide sind reell vorauszusetzen, da sie ja einzeln, wenn auch doppelt zählend auftreten.
Bemerkung ad 3. Dieser Fall 3 tritt z. B. ein, wenn eine Ellipse nach irgend einem Gesetze unendlich flach, zugleich aber auch unendlich klein wird, so daß also die kleine Axe noch unendlich klein gegen die große Axe wird. Erstere wird daher unendlich klein von einer höheren Ordnung werden müssen, als die letztere.

Wir wollen jedoch die 3 verschiedenen Fälle nicht alle einzeln betrachten, vielmehr wollen wir uns der Kürze halber beschränken auf die 3 Fälle, wo der „absolute Kegelschnitt" in einem nulteiligen (1ª) oder in einem einteiligen (1ᵇ) Kegelschnitt oder in 2 konjugiert imaginären Punkten (2ª) besteht. An diesen letzten Fall sind wir bereits gewöhnt von der Euklidischen Geometrie her. Als „absolutes Gebilde" erscheinen bekanntlich in derselben die beiden imaginären Kreispunkte, denen in Punktcoordinaten die doppelt zählende unendlich ferne Gerade entspricht.

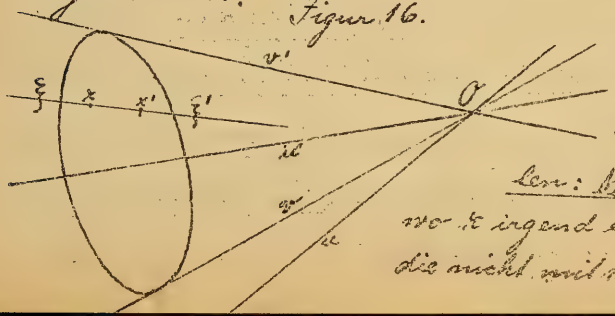
Wenn wir nun diese 3 Fälle weiterhin besonders betrachten, und als Möbiusschen, hyperbolischen und parabolischen Fall unterscheiden, so sei daran erinnert daß das Paar der Kreispunkte oder überhaupt ein Paar imaginärer Punkte einen Übergangsfall bedeutet zwischen einem nulteiligen und einem einteiligen Kegelschnitt." Speziell sahen wir, daß die Kreispunkte den Übergang zwischen Kreisen mit reellem Radius zu solchen

mit imaginärem Radius vermitteln. Wir wollen jetzt dazu übergehen, die Massunterschiede selber zu definieren. Um eine bessere Anschauung zu gewinnen, sei der „absolute Kegelschnitt" als ein reeller gezeichnet. Was wollen wir nun allgemein in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt unter dem Abstand zweier Punkte x und x' verstehen?

Durch x, x' wird eine gerade Punktreihe festgelegt, die den Kegelschnitt in den Punkten ξ und ξ' schneidet. Wir wollen dann, wie wir es in der letzten Stunde gelernt haben, als den Massunterschied der Punkte xx' bezeichnen:

$M(x'x') = k \log. (x, \xi, x', \xi')$, wo k eine beliebige Konstante sein möge. Es ist dies genau die Definition für den Abstand zweier Punkte im binären Gebiet (pag 66), die wir hier nur auf das ternäre Gebiet verallgemeinert haben.

In analoger Weise legen wir den Winkel fest, den zwei gerade Linien u und u' mit einander bilden. Dem Strahlenbüschel, dessen Träger der Schnitt von u und u' ist, gehören stets die zwei Tangenten v und v' an, die man von O aus an den Kegelschnitt legen kann. Figur 16.



Wir definieren dann als den Massunterschied zweier Strahlen: $M(u,u') = k \log (uv, v, u', v')$, wo k irgend eine Konstante bezeichnen möge, die nicht mit k identisch zu sein braucht.

Diese Definition werden wir nun in den 3 Fällen, die wir behandeln wollen, näher zu betrachten haben.

Wir wenden uns daher zunächst zu

1. der elliptischen Maassbestimmung, bei welcher das absolute Gebilde ein nullteiliger Kegelschnitt ist.

Es ist hier natürlich nicht speciell an eine Ellipse zu denken, sondern der Ausdruck „elliptisch" bezeichnet, wie früher, nur, dass die Schnittpunkte $\xi\,\xi'$ der in Betracht zu ziehenden Punktreihe oder die Tangenten $v\,v'$ des in Betracht zu ziehenden Strahlbüschels konjugiert imaginär sind, so dass auch das bei der Definition von M oder M zu Grunde liegende Doppelverhältnis imaginär wird. Wir können zusammenfassend gleich sagen:

Ist der absolute Kegelschnitt nullteilig, so erhalten wir auf jeder reellen geraden Linie und auf jedem reellen Büschel der Ebene eine elliptische Maassbestimmung."

Dies führt uns insbesondere sogleich dazu, für k einzusetzen $k' \cdot i$, wo k' reell ist, damit reelle Elemente eine reelle Entfernung oder einen reellen Winkel bekommen. Wir können dann sofort den Satz aufstellen:

„Jede gerade Linie der Ebene hat eine endliche Länge $= 2\pi k'$, und jedes Büschel der Ebene hat eine endliche Büschelsumme gleich $2k'\pi$." Ausdrücklich fügen wir noch hinzu: „Reelle unendlich weite Elemente giebt es nicht (weder Punkte noch Linien)."

Wir wollen die Verhältnisse nun noch Etwas klarer machen.

indem wir unseren mittleren Kegelschnitt auf sein Polardreieck beziehen. Dann wird seine Gleichung zunächst die Form annehmen müssen: $a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 = 0$.

Durch passende Wahl des Einheitspunktes können wir es jedoch, da a_{11}, a_{22}, a_{33} in unserem Falle dasselbe Vorzeichen haben müssen, stets erreichen, daß unser absoluter Kegelschnitt die Gleichung hat: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ in Punktcoordinaten oder

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0 \text{ in Liniencoordinaten.}$$

Wenn wir dann die Maassunterschiede M und M in Bezug auf diesen Kegelschnitt bestimmen, so wird das ihnen zu Grunde liegende Doppelverhältnis genau die Gestalt annehmen, die wir auf pag. 58, bei der Betrachtung der Euklidischen Maassbestimmung im Punkte kennen gelernt haben. Denn ob wir sagen $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ giebt den absoluten Kegel, in bezug auf den wir das in dem Maassunterschied zweier gegebenen Punkten x und x' vorkommende DV. bestimmen, oder ob wir in $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ unseren absoluten Kegelschnitt sehen, in bezug auf den wir das in dem Maassunterschied zweier Punkte x und x' vorkommende DV. aufstellen wollen, ist für die Rechnung ganz gleich: Es ergiebt sich in beiden Fällen derselbe Ausdruck für das DV. Wollen wir auch noch für M, bezw. M eine cos.- und sin.-Formel aufstellen, so nehmen dieselben eine ganz ähnliche Gestalt an, wie die entsprechenden Formeln auf pag. 58. Denn es gilt allgemein der Satz:

Die Formeln für M und M werden bei Zugrundelegung des

Polardreiecks ganz genau dieselben, welche wir für die Maassbestimmung im Punkte in der Euklidischen Geometrie kennen, nur dass im letzteren Falle an Stelle von k' und κ' der Zahlenfactor $1/2$ getreten ist."

Wir wollen unsere früheren Formeln einmal gemäss dieses Satzes modificieren. Wir bekommen:

$$\frac{M}{2k'} = \frac{i}{2} \log. \sqrt{\frac{\Sigma_{xx'} + \sqrt{\Sigma_{xx'}^2 - \Sigma_{xx} \cdot \Sigma_{x'x'}}}{\Sigma_{xx'} - \sqrt{\Sigma_{xx'}^2 - \Sigma_{xx} \cdot \Sigma_{x'x'}}}},$$

$$\frac{M}{2k'} = \frac{i}{2} \log. \sqrt{\frac{\Sigma_{uu'} + \sqrt{\Sigma_{uu'}^2 - \Sigma_{uu'} \Sigma_{uu'}}}{\Sigma_{uu'} - \sqrt{\Sigma_{uu'}^2 - \Sigma_{uu} \cdot \Sigma_{u'u'}}}}.$$

Nun wollen wir uns z. B. ein Dreieck konstruiren und seine 3 Seiten M_1, M_2, M_3, und seine 3 Winkel M_1, M_2, M_3, in Betracht ziehen. Wir fragen uns, was für Identitäten bestehen zwischen diesen 6 Grössen oder mit anderen Worten, was für eine Art Trigonometrie gilt bei elliptischer Maassbestimmung? Sowie wir statt M_1 M_2 M_3 und M_1 M_2 M_3 die Quotienten $\frac{M_1}{2k'}$ $\frac{M_2}{2k'}$ $\frac{M_3}{2k'}$ und $\frac{M_1}{2k'}$ $\frac{M_2}{2k'}$ $\frac{M_3}{2k'}$ in Betracht ziehen, so werden in Folge des letzten Satzes dies Seiten und Winkel sein, die ebenfalls in einem sphaerischen Dreiecke auf einer Kugel vom Radius 1 vorkommen können. Wir können daher setzen:

$$\frac{M_1}{2k'} = a; \quad \frac{M_2}{2k'} = b; \quad \frac{M_3}{2k'} = c;$$

$$\frac{M_1}{2k'} = \alpha; \quad \frac{M_2}{2k'} = \beta; \quad \frac{M_3}{2k'} = \gamma; \text{ wo } a, b, c;$$

α, β, γ die Seiten und Winkel eines sphaerischen Dreiecks

bezeichnen mögen. Wir haben so gefunden:

„Man erhält die trigonometrischen Formeln für die elliptische Geometrie der Ebene, wenn man in die Formeln der sphaerischen Trigonometrie für $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ bezw. ein-setzt: $\frac{M_1}{2k'}, \frac{M_2}{2k'}, \frac{M_3}{2k'}; \frac{M_1}{2k'}, \frac{M_2}{2k'}, \frac{M_3}{2k'}$."

Setzen wir nun gar den Radius der Kugel gleich $2k'$, so haben wir, wie leicht ersichtlich, eine noch grössere Übereinstimmung unserer Formeln mit denen der sphaerischen Geometrie auf dieser Kugel. Speziell können wir daher das elliptische Messen auf der Ebene, sobald wir $2k'$ insbesondere gleich 1 nehmen, wie fortan geschehen soll, mit dem Messen auf der Kugel mit dem Radius $R = 2k'$ vergleichen.

Doch stimmt darum die elliptische Geometrie in der Ebene ganz genau überein mit der sphaerischen Geometrie? Keineswegs. Eigentlich sollten wir ja der Grundauffassung der projectiven Geometrie entsprechend die Ebene gar nicht vergleichen mit der Oberfläche der Kugel, sondern mit dem Strahlen- und Ebenenbündel, dessen Träger der Mittelpunkt der Kugel ist. Denn:

„Wenn wir die Geometrie der Ebene hier mit der sphaerischen Geometrie verglichen haben, so dürfen wir den Unterschied nicht vergessen, der sich darin ausspricht, daß 2 gerade Linien der Ebene sich in nur einem Punkte schneiden, 2 grösste Kreise der Kugel aber in 2 Punkten."

„Ebene und Kugel sind eben ein-zweideutig auf einander bezogen."

Dies gibt uns z.B. auch den Grund dafür an, dass die Länge der geraden Linien in der Ebene elliptisch gemessen gleich $2k'\pi$ ist, während ein grösster Kreis auf der Kugel vom Radius $2k'$ die doppelte Länge $4k'\pi$ hat. Trotzdem ist es sehr nützlich, den Vergleich zwischen Ebene und Kugel weiter zu verfolgen. Wir finden z.B. so:

Wir wissen der Gesammtinhalt der Kugelfläche ist gleich $4\pi.(4k'^2)$. Was wird nun der Gesammtinhalt $\mathfrak{I}$ unserer Ebene nach elliptischer Maassbestimmung sein? Wir erkennen sofort, da die Ebene ja eigentlich nur der Halbkugel entspricht:

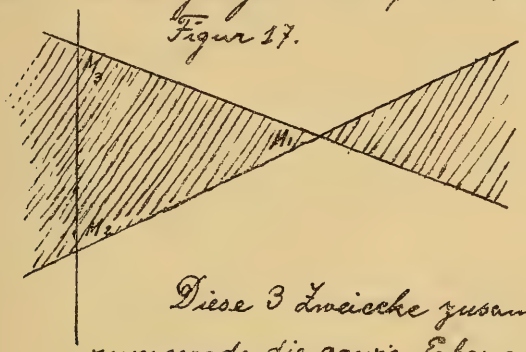
„Der Gesammtinhalt $\mathfrak{I}$ der Ebene bei elliptischer Maassbestimmung ist ein endlicher, er ist gleich $8\pi.k'^2$, also halb so gross als der Gesammtinhalt der Bildkugel."

Nun können wir daran anknüpfend auch leicht eine Formel für den Inhalt eines Dreiecks in unserer Ebene ableiten.

Wir wollen, wie wir schon oben beiläufig verabredeten, der Einfachheit halber $k'=\frac{1}{2}$ setzen, damit der Winkel des Gesammtbüschels gleich π ist, wie es ja auch auf der Kugel gewöhnlich angenommen wird. Entsprechend der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie werden wir dann $M_1+M_2+M_3-\pi$ als den „Excess unseres Dreiecks" bezeichnen. Wir wollen nun sehen, ob wir mit Hülfe dieses Excesses den Inhalt des Dreiecks festlegen können in derselben Weise, wie man es auf der Kugel macht. Wir ziehen die Strahlen, welche die Seiten des Dreiecks bilden, aus. Wir haben dann zunächst ein Zweieck, das

begrenzt wird von den Schenkeln des Winkels M_1 (c. fig.). Der Inhalt desselben ist gleich $\frac{M_1}{\pi} \cdot J$, denn derselbe verhält sich zu der ganzen Ebene, wie $4 M_1 : \pi$.

Figur 17.



Analog haben die von den Schenkeln der Winkel M_2 und M_3 eingeschlossenen Zweiecke den Inhalt $\frac{M_2}{\pi} \cdot J$ und $\frac{M_3}{\pi} \cdot J$.

Diese 3 Zweiecke zusammengenommen überdecken nun gerade die ganze Ebene einmal, ausserdem aber noch das gegebene Dreieck zweimal. Es ergiebt sich daher einfach:

$$\frac{M_1}{\pi} + \frac{M_2}{\pi} + \frac{M_3}{\pi} = J + 2\Delta. \text{ Hieraus ergiebt sich:}$$

$$\Delta = \frac{J(M_1 + M_2 + M_3 - \pi)}{2\pi} \quad \text{oder wenn wir}$$

für J seinen Wert setzen:

$$\Delta = 4k'^2(M_1 + M_2 + M_3 - \pi). \text{ In Worten lautet}$$

dieses Resultat also:

Ein ebenes Dreieck hat bei elliptischer Maassbestimmung einen positiven Excess (d.h. seine Winkelsumme ist grösser als π), und es bestimmt sich der Inhalt des ebenen Dreiecks durch die Formel $\Delta = 4k'^2$ mal dem Excess." Das ist dieselbe Formel, welche die elementare Geometrie für das sphärische Dreieck auf der Kugel vom Radius $2k'$ aufstellt.

Wollen wir diese ganzen Entwickelungen nun in noch etwas lebendigere Beziehung zur sphaerischen Trigonometrie setzen, so werden wir dies dadurch erreichen, daß wir unseren nullteiligen Kegelschnitt speciell als nullteiligen Kreis voraussetzen. Wenn x, y, t die homogenen Coordinaten unserer Ebene sind, so wollen wir jetzt einmal $x^2+y^2+4k'^2t^2=0$ als absoluten Kegelschnitt einführen. Dies stellt bekanntlich einen nullteiligen Kreis vom Radius $2k'i$ vor.

Einen solchen Kreis kann man in folgender Weise in eine einfache Abhängigkeit vom gewöhnlichen Kugelkreis der unendlich fernen Ebene setzen: (wie wir dies schon gelegentlich vor Weihnachten thaten.) Wir begeben uns in den Raumpunkt $x=0, y=0, \frac{z}{t}=2k'$. Wenn wir von diesem Raumpunkt aus im Sinne der euklidischen Geometrie den absoluten Kegel gelegt denken, so ist die Gl. desselben: $x^2+y^2+(z-2k't)^2=0$ Wenn wir nun diesen Kegel mit der Ebene $z=0$ schneiden, so bekommen wir in der xy-Ebene genau den nullteiligen Kreis, den wir der elliptischen Maassbestimmung in dieser Ebene zu Grunde legen wollten, so daß wir zunächst den bereits im 1. Teil zur Sprache gebrachten Satz zu merken haben:

„Der nullteilige Kreis unserer Ebene erscheint als Schnitt desjenigen Kegels, der vom Raumpunkt $x=0, y=0, \frac{z}{t}=2k'$ aus sich nach dem Kugelkreis erstreckt."

Wir haben so unsere Ebene in projectivc Beziehung gesetzt zu den Grundgebilden im Raumpunkte $x=0, y=0, z=2k't$.

Die elliptische Maassbestimmung, welche sich in der Ebene auf unseren absoluten Kegelschnitt gründen läßt, ist daher von den Konstanten k' und k' abgesehen ein einfacher Schnitt der gewöhnlichen Maassbestimmung, die wir für die Strahlen und Ebenen dieses gewöhnlichen Raumpunktes aufstellen können."

Wir wollen nun unsere bisherige Konstruktion noch dadurch vervollständigen, daß wir um den Punkt $x=0, y=0, \frac{z}{t}=2k'$ eine Kugel vom Radius $2k'$ legen. Dieselbe wird unsere Ebene im Punkte $x=0, y=0$ berühren. Die elementare Geometrie dieser Kugel, die wir durch Centralprojection vom Mittelpunkte aus auf die Ebene beziehen, wollen wir dann vergleichen mit der elliptischen Geometrie der Ebene. Wir sehen zunächst sofort, die charakteristischen Maassverhältnisse in beiden werden immer dieselben sein. Haben nämlich 2 Punkte in der Ebene den Abstand $M(xx') = k'i \log D$, so ist der Abstand der entsprechenden Punkte auf der Kugel, die man als Schnittpunkte der Verbindungslinien von O mit den Punkten xx' erhält, gleich $R \cdot \frac{i}{2} \log D$, wo R gleich $2k'$ zu setzen ist und die Doppelverhältnisse in beiden Fällen dieselben sind. Ebenso wird sich, da wir verabredetermaßen $k' = \frac{i}{2}$ rechnen, der Ausdruck für den Winkel zweier Strahlen u und u': $M(uu') = \frac{i}{2} \log \Delta$ ohne Weiteres auf den Winkel auf der Kugel übertragen, welchen die beiden größten Kreise mit einander bilden, die sich als Schnitte der die Geraden u und u' von O aus projicierenden Ebenen mit der Kugelfläche ergeben. Allgemein erhalten wir daher, indem wir

jetzt von den auf pag. 91. betonten Unterschieden absehen, das Resultat:

Sobald wir für die elliptische Maassbestimmung in der Ebene noch $k = \frac{i}{2}$ nahmen, ist die elliptische Maassbestimmung in der Ebene genau dieselbe wie die gewöhnliche Maassbestimmung auf unserer Hilfskugel."

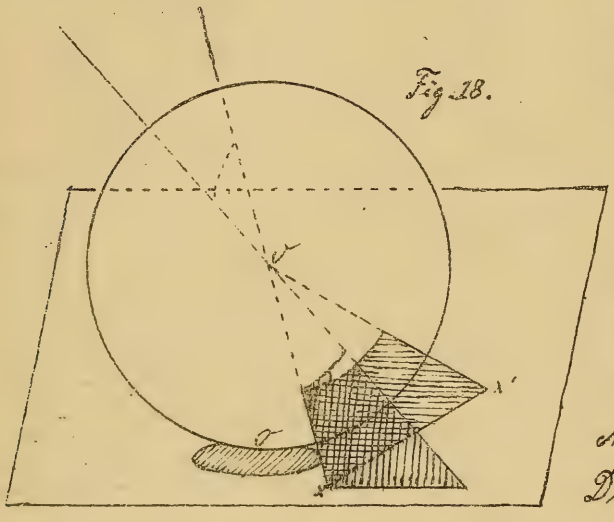


Fig. 18.

Wir wollen daran beiläufig folgende Betrachtung knüpfen:

Wenn k' größer wird so wird auch die Hilfskugel größer und größer und schmiegt sich immer mehr der Ebene in der Nähe des Nullpunktes an. Diese Thatsache gestattet uns sofort den Satz auszusprechen.

„Wenn k' größer und größer wird, nähert sich die für die Ebene verabredete elliptische Maassbestimmung, sofern wir uns auf einen kleinen Bereich um den Coordinatenanfangspunkt beschränken, immer mehr der gewöhnlichen Maassbestimmung und fällt für $k' = \infty$ geradezu mit ihr zusammen."

Ausdrücklich wollen wir jedoch darauf hinweisen,

daß so lange $k' < \frac{1}{2}$ ist, nur für die nächste Umgebung der Nullstelle die angenäherte Identität der elliptischen Maassbestimmung mit der gewöhnlichen besteht, der Art, daß die Differenzen beider innerhalb der Grenzen unserer Konstruktion bleiben, darüber hinaus wachsen die Differenzen schließlich über jedes Maass.

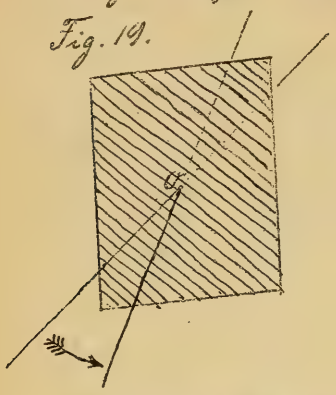
Nun wollen wir den bereits besprochenen Unterschied der elliptischen Geometrie der Ebene und der gewöhnlichen Geometrie auf der Kugel, welcher wegen der Ein-Zweideutigkeit der Beziehung beider Gebilde statt hat, noch näher betrachten. Diese Eingweideutigkeit der Beziehung wird gewisse Abweichungen der ebenen und sphaerischen Geometrie bedingen.

„Beispielsweise schneiden sich 2 größte Kreise der Kugel in 2 Punkten, 2 gerade Linien auf der Ebene nur in einem, und es wird ferner die Kugel durch einen größten Kreis in 2 Hälften zerlegt, die Ebene durch die gerade Linie nicht."

Es ist vielleicht gut, diese letzte Behauptung durch das von O auslaufende Strahlenbündel deutlich zu machen. Wenn wir in dem Strahlenbündel eine Ebene festlegen, so wird das Bündel hierdurch noch nicht in 2 Hälften zerlegt, vielmehr kann immer noch jeder Strahl in einen beliebigen andern übergeführt werden, ohne die festgelegte Ebene zu durchkreuzen. Dagegen findet diese Eigenschaft nicht mehr statt, wenn wir Halbstrahlen in Betracht ziehen. Denn man kann einen Halbstrahl, der auf der einen Seite der Ebene liegt, nämlich einem zweiten der anderen Seite zur

Deckung bringen, ohne die Ebene zu durchkreuzen. Dieser Unterschied zwischen dem Büschel der Vollstrahlen und dem Büschel der Halbstrahlen ist genau derselbe, wie zwischen der Ebene und der Kugel. Wenn wir jedoch diese Verhältnisse ganz verstehen wollen, so müssen wir uns in einem kleinen Excurs zuvor mit einigen Anschauungen der Analysis situs befreunden.

Fig. 19.



Excurs über die Analysis situs. Was wir unter Analysis situs zu verstehen haben, war bereits im ersten Teile auseinandergesetzt.

Als Litteratur über diesen Gegenstand wollen wir jedoch noch erwähnen:

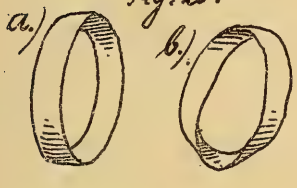
Riemann, Bd. 54. Crelle 1857 als die Schrift, welche diese Untersuchungen überhaupt zuerst angeregt.

Dyck, Math. Ann. 32. 1888. In dieser neuesten Abhandlung über die Analysis situs finden sich insbesondere sehr zahlreiche und genaue Citate.

Es handelt sich nun bei uns um einen Punkt, der bei Riemann noch nicht hervortritt, dessen Entdeckung man vielmehr Moebius verdankt. Er hat dieselben veröffentlicht in seiner letzten Abhandlung: „Über Polyeder," die zunächst 1865 in den Leipziger Berichten, dann auch im Bd. II. seiner Werke abgedruckt ist. Man

findet dann insbesondere aus dem Nachlasse im Bd. II. der Werke pag. 519. noch nähere Angaben darüber, wie Moebius zu dieser Entdeckung gekommen ist, von der wir jetzt zu sprechen haben. Wir wollen zunächst an einem Beispiel uns die neuen Verhältnisse klar machen. Wenn man einen Streifen Papier nicht in der gewöhnlichen Weise zusammenlegt, dass man die beiden Enden einfach miteinander vereinigt, wodurch eine Ringfläche, wie in Fig. 20.a dargestellt ist, entstehen würde, sondern in der Weise, dass man das eine Ende vorerst umwendet und dann mit dem anderen vereinigt, so stellt dieses Papierstück eine merkwürdige Fläche dar, welche sich wesentlich von der ersten unterscheidet. (Fig. 20.b). Wenn man nämlich von einem bestimmten Punkte der Fläche 20.b ausgehend längs des Streifens weitergeht, so wird man nach einmaligem Umlaufen derselben auf der anderen Seite der Fläche sich befinden und erst nach nochmaligem Umlaufen wird man auf die Ausgangsseite zurückkommen, eine Eigenschaft, die, wie leicht ersichtlich, der Fläche a) nicht zukommt. Noch deutlicher tritt dieser Unterschied der Flächen a und b hervor, wenn man den Papierstreifen etwa anzustreichen unternimmt. Während es bei der Figur a) wohl möglich ist, nur die eine Seite anzustreichen, ist man bei der Figur b) gezwungen, es auf beiden Seiten zu thun. Man nennt die Fläche b „das Moebiussche Blatt."

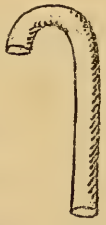
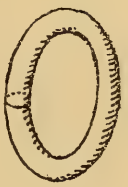
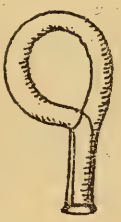
Fig. 20.



Moebius wandte dieses Blatt auf die Theorie der Polyeder an, insofern letztere auch so gebildet sein können, dass aufeinander folgende Flächen ein solches Blatt ausmachen, (was vor Moebius übersehen worden war.) Wir wollen auf diese specielle Anwendung jedoch nicht näher eingehen. Wir fassen vielmehr allgemein das über das Moebiussche Blatt Gesagte als eine Eigenschaft gewisser krummer Flächen auf, die wir dann „Doppelflächen" nennen wollen. Man wählt diese Bezeichnung, weil man die Fläche doppelt umlaufen muss, ehe man an die Ausgangsstelle zurückgelangt ist. Es ist nun höchst merkwürdig, dass an solche Verhältnisse niemand, auch Riemann nicht, vorher gedacht hat. Man hat eben immer geglaubt, dass man bei einer Fläche stets 2 von einander durchaus verschiedene Seiten unterscheiden könne, die event. nur im Rande zusammenhängen. Das Moebiussche Blatt hat allerdings noch eine Randkurve. Es liegt daher die Frage nahe, giebt es auch durchaus geschlossene Flächen, die doch Doppelflächen sind? In dieser Hinsicht können wir uns leicht ein Beispiel denken, das uns zeigt, dass es in der That geschlossene Doppelflächen giebt. Doch müssen wir, wenn wir im Endlichen bleiben wollen, die Fläche sich selbst durchsetzen lassen. Wir werden dabei nicht weiter davon sprechen, dass die Fläche eine Doppelcurve besitzt, denn der „Verzweigungsschnitt" [Riemann], in welchem sich die Blätter durchsetzen, ist für die hier ins Auge zu fassenden Zusammenhangsfragen ganz unwesentlich.

Wir können dann mit Hülfe eines Kautschukschlauches uns eine solche Fläche leicht vorstellen. Wenn wir die beiden Enden desselben einfach an einander biegen, so bekommen wir eine gewöhnliche Ringfläche, die keine Doppelfläche vorstellt; denn wir können bei ihr eine Aussen- und Innenseite unterscheiden. Wenn wir uns etwa ein flächenhaftes Wesen denken, d. h. ein Wesen, welches, einmal auf die Fläche gesetzt, sich nur entlang der Fläche bewegen kann, so kann dasselbe, wenn es einmal an der Aussenseite sich befindet, wie es sich auch bewegen mag, niemals an die Innenseite gelangen und umgekehrt. Ebenso kann man entweder die Aussenseite oder die Innenseite der Fläche für sich mit Farbe anstreichen. Doch nun kann man den Schlauch noch in ganz anderer Weise zusammenbiegen, indem man nämlich das eine Ende nach innen umstülpt, das andere dagegen durch die Wandung in das Innere hineinleitet und dann mit dem umgestülpten Ende vereinigt. v. Fig. 21. c

Fig. 21.

a.)  b.)  c.) 

Auf diese Weise haben wir eine durchaus zusammenhängende Doppelfläche gewonnen, bei welcher eine Innen- und Aussenseite etwa durch besonderen farbigen Anstrich

nicht mehr zu unterscheiden ist. Denken wir uns auf dieser Fläche ein zweidimensionales Wesen, so wird dies, indem es an seinem früheren Ort zurückgelangt, dabei sein eigener Antipode werden können, und es muss zweimal hindurchkriechen, ehe es in die Ausgangslage zurückgelangt ist.

Wir können nun leicht ein Kennzeichen verabreden, welches uns in den Stand setzt sofort zu entscheiden, ob wir es mit einer Doppelfläche zu thun haben oder nicht. Wir geben dieses Kennzeichen an, indem wir das Bisherige zusammenfassend den allgemeinen Satz aussprechen: „Zweidimensionale Mannigfaltigkeiten, mögen sie berandet sein oder geschlossen, können noch zweierlei Eigenschaften besitzen. Wenn man aus ihnen an irgend einer Stelle eine mit einem Pfeile versehene Indicatrix construiert, als solche haben wir uns für die Betrachtung von Flächen im unendlich kleinen mit einem Umlaufssinn versehenes Flächenstück zu denken, und diese längs der Fläche hinschiebt, bis man zur Anfangsstelle zurückkommt, dann kann es sein, dass der Pfeil der Indicatrix immer nach der ursprünglichen Richtung weist; es kann aber auch sein, dass er seinen Sinn geändert hat. Im letzteren Falle nennt man die Mannigfaltigkeit eine Doppelmannigfaltigkeit, eben weil man zweimal um die Fläche herumgehen muss, damit der Sinn der Indicatrix der alte bleibt."

Wir wollen noch bemerken, daß man mit einer solchen Doppelfläche keinen Raumtheil einschließen kann; dieselbe legt nur eine gewisse Scheidewand durch den Raum hindurch. Dies ist wohl auch der Grund, daß man solange nicht an die Möglichkeit der Doppelflächen gedacht hat. Denn man vercinnlicht Flächen, z. B. im Modell, zugern als Grenzen von Raumteilen.

Wir kehren nun zurück zu unserer Hülfskugel und zu unserer Ebene, auf der wir die elliptische Maassbestimmung haben. „Der Unterschied zwischen unserer Hülfskugel und unserer mit elliptischer Maassbestimmung versehenen, in sich zurücklaufenden Ebene ist nur der, daß die Kugel eine einfache Fläche ist, die in sich zurücklaufende Ebene aber eine Doppelfläche."

Wir fügen sogleich noch den Satz hinzu:

„Entsprechend ist die Mannigfaltigkeit der Halbstrahlen eine einfache Mannigfaltigkeit, die Mannigfaltigkeit der Vollstrahlen eine doppelte Mannigfaltigkeit."

Wir beweisen diese Sätze, indem wir unser Kennzeichen mit Hülfe der Indicatrix anwenden. Bei den Halbstrahlen werden wir als Indicatrix einen schmalen, von Halbstrahlen gebildeten Kegel anzunehmen haben, der mit einem Pfeil zur Bezeichnung des Umlaufsinnes versehen ist Fig. 23. a. Dieser Kegel wird, wie wir ihn auch drehen, in die alte Lage gebracht, stets denselben Umdrehungssinn zeigen. Doch anders wird es, wenn wir uns einen kleinen Kegel um-

den Vollstrahlen bilden und diesem die Pfeile beisetzen. Fig. 23½. Denn wenn wir diesen dünnen Kegel etwa um seinen Mittelpunkt drehen und zwar, wenn diese ungenaue Ausdrucksweise gestattet ist, um 180°, so sehen wir, daß der Kegel an seinen alten Platz gekommen ist, daß aber der Umlaufssinn des Kegels gerade der umgekehrte geworden ist. Wir müssen ihn daher zweimal herumdrehen, bis der Umlaufssinn der alte ist. Diese Betrachtung der Vollstrahlen überträgt sich nun ohne Weiteres auf die Ebene, die der Halbstrahlen auf unsere Hülfskugel. Und so wird uns der auf vorhergehenden Seite aufgestellte Unterschied zwischen der elliptischen Ebene und der Hülfskugel leicht verständlich erscheinen.

Fig. 22.

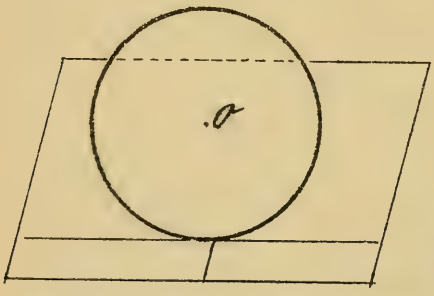
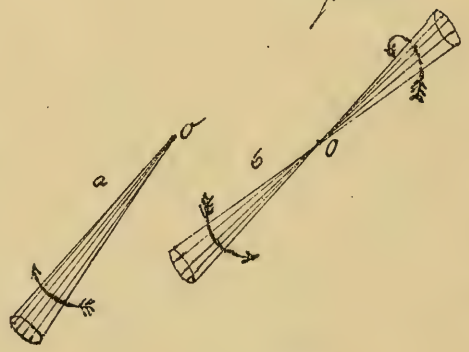


Fig. 23.



Wir wollen in Rücksicht auf die letzten Betrachtungen noch bemerken:

„Der merkwürdige Satz, daß eine elliptische Ebene oder auch die Ebene der projectiven Geometrie schlechtweg

durch in sich zurücklaufende gerade Linien nicht in 2 getrennte Hälften zerlegt wird, wie man es doch sonst bei den Flächen, z. B. bei der Kugel gewohnt ist, dieser Satz ist uns nur deshalb merkwürdig, weil wir in unserer täglichen Erfahrung keine Ursache haben, uns an die Anschauung einer geschlossenen Doppelfläche zu gewöhnen."

Der Vergleich der elliptischen Maassbestimmung in der Ebene und der gewöhnlichen Maassbestimmung auf der Kugel vom Radius $2k'$ mag noch von anderer Seite durchgeführt werden.

Wenn zwei Flächen allgemein so auf einander bezogen sind, dass jedesmal zwei Punkte X und X' der einen Fläche denselben Abstand von einander haben, wie zwei entsprechende Punkte der anderen Fläche, so nennt man in der Flächentheorie diese Flächen aufeinander abwickelbar. So kann man z. B. einen Rotationscylinder auf eine Ebene abwickeln so, dass zwei einander entsprechende Punkte jedesmal zusammenfallen. Wenn wir nun dieses Wort „abwickelbar," welches in der Lehre von den krummen Flächen allgemein gebraucht wird, auch bei unseren speciellen Betrachtungen aufnehmen wollen, so werden wir etwa folgendermaßen unser Resultat der letzten Stunde aussprechen können:

„Die elliptische Ebene und die gewöhnliche Kugel sind auf einander abwickelbar, ohne darum den gleichen Zusammenhang zu haben." Letzteres ist, wie leicht ersichtlich, auch gar nicht erforderlich; denn schon das erwähnte Beispiel des

Cylinders zeigt uns, daß zwei Flächen, die auf einander abwickelbar sind, durchaus nicht eindeutig aufeinander bezogen zu sein brauchen."

Nun knüpft die Flächentheorie die Untersuchungen über die Abwickelbarkeit gewöhnlich nicht an den fertigen Ausdruck für den Länge der Fläche genommenen endlichen Abstand zweier beliebiger Punkte an, sondern man wählt auf beiden Flächen 2 unendlich benachbarte einander entsprechende Punkte und zeigt, daß deren Abstand, den man als das „Bogenelement" ds bezeichnet, auf beiden Flächen derselbe ist.

Um daher unsere Betrachtungen an die der Flächentheorie anzuschließen, wollen wir einmal den Ausdruck des Bogenelements ds für 2 unendlich benachbarte Punkte x und $x + dx$ auf unserer elliptischen Ebene resp. auf der Hülfskugel von Radius $2k'$ berechnen. Wir werden uns zu diesem Zwecke, um Zwischenrechnungen zu vermeiden, nicht der bisherigen Definition des Abstandes vermittelst des Logarithmus des charakteristischen Doppelverhältnisses bedienen, sondern von der Formel für den $\sin \frac{M}{2k'}$ ausgehen. Aus dieser folgt sofort:

$$M(xx') = 2k' \cdot \arcsin \frac{\sqrt{4k'^2(xt'-x't)^2 + 4k'^2(yt'-y't)^2 + (xy'-x'y)^2}}{\sqrt{x^2+y^2+4k'^2t^2} \cdot \sqrt{x'^2+y'^2+4k'^2t'^2}},$$

Diese Formel, welche den Abstand der Punkte x, x' in unverkürzter Form darstellt, wollen wir zu Grunde legen.

Wir setzen in ihr jetzt $t=t'=1$, mit anderen Worten, wir gehen von homogenen Coordinaten zu gewöhnlichen über. Lassen wir dann den Punkt x' dem Punkte x unendlich benachbart sein, so können wir setzen:
$x'=x+dx$, $y'=y+dy$. Diese Werthe substituieren wir in unsere Formel und vereinfachen dieselbe dann, indem wir uns auf unendlich kleine Grössen erster Ordnung beschränken. Wir erhalten so.:

$$ds = 2k' \frac{\sqrt{4k'^2dx^2+4k'^2dy^2+(xdy-ydx)^2}}{x^2+y^2+4k'^2}.$$

Dividieren wir noch Zähler und Nenner durch $4k'^2$, so kommt schliesslich

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2+\frac{(ydx-xdy)^2}{4k'^2}}}{1+\frac{x^2+y^2}{4k'^2}}$$

Dieser Ausdruck für das Bogenelement gilt natürlich ebensowohl für die elliptische Ebene, wie für die gewöhnliche Kugel vom Radius $2k'$. Lassen wir nun in ihm k' unendlich gross werden, so geht ds über in:
$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$. Wir erkennen daher:
„Unser so gefundenes Bogenelement geht für $k'=\infty$ in das Bogenelement der gewöhnlichen Maassbestimmung der Ebene über, was uns aufs neue mit der Anschauung vertraut macht, dass die gewöhnliche Maassbestimmung der Ebene ein Grenzfall unserer jetzigen elliptischen Maassbestimmung ist."

Wir gehen nun über zu:

2. der hyperbolischen Maassbestimmung.

Derselben liegt ein einteiliger Kegelschnitt zu Grunde. Wir wollen in Bezug auf denselben: den Abstand zweier Punkte als $M(xx') = k \log. D$; den Winkel zweier Strahlen als $M(uu') = K \log. \Delta$. in der früher verabredeten Weise einführen. Wir wollen ferner gleich k als reell, im übrigen aber beliebig, K dagegen $= \frac{i}{2}$ voraussetzen, aus der letzteren Annahme ergiebt sich sofort, das die Winkelbestimmung die Periode π hat.

Wir können dann gleich eine allgemeine Betrachtung vorausschicken. Wir erkennen zunächst:

Alle Formeln, die wir für die elliptische Maassbestimmung erhalten haben, sind doch schliefslich nur analytische Identitäten, die sich aus dem einmal definierten Ausdruck für den Abstand zweier Punkte oder Strahlen ergeben haben, nicht aber aus besonderen geometrischen Verhältnissen. Es sei z. B. erinnert an die Formeln der elliptischen Trigonometrie oder an die zuletzt abgeleitete Formel für den Abstand ds zweier unendlich benachbarter Punkte. Nun unterscheidet sich aber unsere hyperbolische Maassbestimmung von der elliptischen, was die Rechnungen angeht, nur dadurch, daß wir jetzt k nennen, was früher mit $k'i$ bezeichnet ist. Es ergiebt sich daher ohne weiteres die Regel:

" Ersetzt man in den Formeln der elliptischen Geometrie

die dort vorkommende Größe k' durch $\frac{k}{i}$, so erhält man Formeln der hyperbolischen Geometrie."

Wir wollen dies an einem Beispiel einmal durchführen. Wir hatten in der elliptischen Geometrie als absoluten Kegelschnitt schliesslich genommen: $x^2+y^2+4k'^2t^2=0$, welches einen nullteiligen Kreis vom Radius $2k'i$ darstellt. Ersetzen wir jetzt k' durch $\frac{k}{i}$, so bekommen wir $x^2+y^2-4k^2t^2=0$. Dieses stellt einen einteiligen Kreis dar, den wir einmal der hyperbolischen Maaßbestimmung zu Grunde legen wollen. Wenn wir dann das Bogenelement ds ausrechnen wollen, so bekommen wir, indem wir in dem früheren Ausdruck für k' setzen $\frac{k}{i}$:

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2-\frac{(ydx-xdy)^2}{4k^2}}}{1-\frac{x^2+y^2}{4k^2}}$$

Durch diese Formel läßt sich also beispielsweise das Bogenelement im hyperbolischen Falle geben. Von hier aus erkennen wir dann wieder, daß sich die gewöhnliche Geometrie der Ebene nicht nur an die elliptische, sondern auch an die hyperbolische als Grenzfall anschließt.

Wir wollen den oben ausgesprochenen Satz noch auf andere Weise in Worte fassen. Wir fanden, die elliptische Geometrie ist dieselbe, wie die auf einer Kugel von Radius $2k'$. Jetzt werden wir sagen können:

4 Die hyperbolische Geometrie ist wie die gewöhnliche Geometrie auf einer Kugel vom Radius $\frac{2k}{i}$, also auf

einer Kugel von imaginärem Radius."

Hierdurch ist allerdings der unmittelbaren Anschauung wenig gedient. Der Satz wird uns erst später nützlich werden.

Wir wollen uns jetzt speciell in die Verhältnisse der hyperbolischen Geometrie hineindenken.

a./ Bestimmung des Abstandes zweier Punkte x und x'.

Es seien zwei Punkte x, x' gegeben, deren Abstand hyperbolisch bestimmt werden soll. Wir verbinden dieselben und erhalten als Schnittpunkte der Verbindenden derselben die reellen oder imaginären Punkte ξ, ξ', die mit den Punkten x, x' selbst das der Maassbestimmung zu Grunde liegende Doppelverhältnis bilden. Je nach dem Wert, den dieses Doppelverhältnis annimmt, ergeben sich dann leicht die folgenden Sätze:

Wenn x und x' beide im Innern des Kegelschnittes liegen, dann kann ihre Entfernung reell genommen werden und ist insofern eindeutig bestimmt, da der log. nur eine imaginäre Periode hat. (Fig. 24.a).

Liegt dagegen nur der eine Punkt im Innern, der andere im Äusseren des Kegelschnitts, so ist die Entfernung imaginär, da das Doppelverhältnis der 4 Punkte negativ wird. (Fig. 24a), keiner der unendlich vielen Werte des Logarithmus kann vor dem anderen bevorzugt werden.

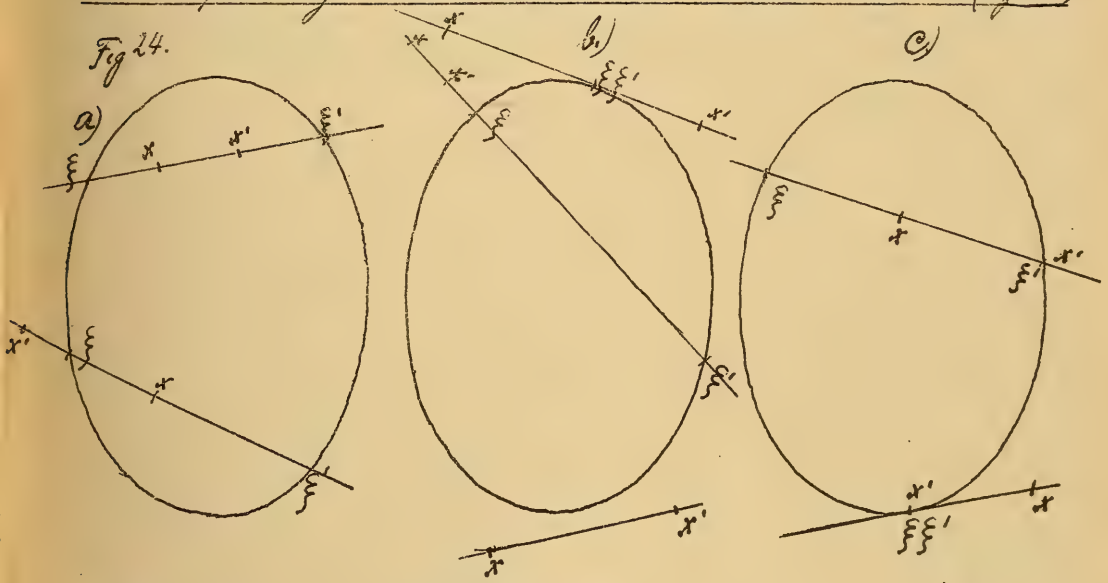
Liegen x und x' beide ausserhalb, so ist zu unterscheiden, ob ihre Verbindungsgerade den Kegelschnitt

trifft, nicht trifft oder berührt. Im ersten Falle wird das charakteristische Doppelverhältnis reell, im zweiten imaginär, im dritten gleich 1. Daher ist im ersten Fall die Entfernung der Punkte, wenn wir wollen, reell, im zweiten imaginär, im dritten gleich 0 (Fig. 24 b.).

Rückt einer der beiden Punkte, z. B. x' auf unseren Kegelschnitt, so wird das Doppelverhältnis und damit auch die Entfernung der Punkte unendlich groß.

Hierbei müssen wir nur den einzigen Fall ausnehmen, wo die Verbindungslinie xx' im Punkte x' berührt. Denn da dann das Doppelverhältnis gleich $\frac{0}{0}$, d. h. unbestimmt ist, so erhält auch der Logarithmus desselben und damit die Entfernung der Punkte einen unbestimmten Wert (Fig. 24 c.).

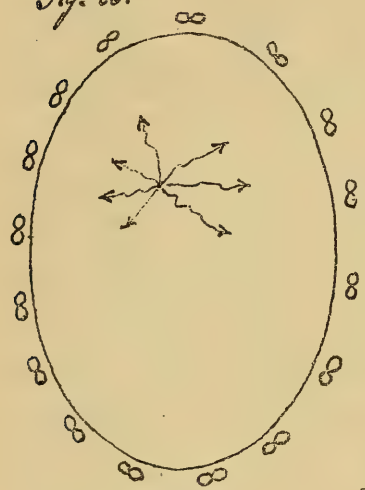
Fig. 24.



Dies sind die ersten Bemerkungen, die man macht, wenn

man sich zu orientieren sucht. Denken wir uns nun einmal wieder ein mit hyperbolischer Maussbestimmung ausgestattetes zweidimensionales Wesen im Inneren des Kegelschnittes, so wird dieses offenbar nach jeder Richtung sich frei bewegen können. „Jeder Punkt im Innern wird für dasselbe erreichbar sein, die Punkte des Kegelschnittes sind unerreichbar, weil unendlich fern, und die Punkte ausserhalb des Kegelschnittes existieren überhaupt nicht, sie bilden ein ideales Gebiet."

Fig. 25.



b.) Bestimmung des Winkels zweier geraden Linien.

Es seien die beiden geraden Linien u und u' gegeben. Von ihrem Schnittpunkte aus ziehen wir die Tangenten an den absoluten Kegelschnitt und bestimmen das Doppelverhältnis derselben mit den gegebenen Linien u und u'. Je nach dem Werte desselben werden wir die verschiedenen möglichen Fälle der hyperbolischen Winkelbestimmung zu unterscheiden haben. Doch ist jetzt zu bemerken, dass wir $k' = \frac{i}{2}$ genommen haben, so dass die Verhältnisse sich gerade umgekehrt verhalten, wie unter a.) Hiernach ergiebt sich:

Kreuzen sich die beiden Geraden im Innern des absoluten Kegelschnittes, so bilden sie einen reellen

Winkel, denn die Tangenten von ihrem Schnittpunkte aus sind imaginär (Fig. 25 c).

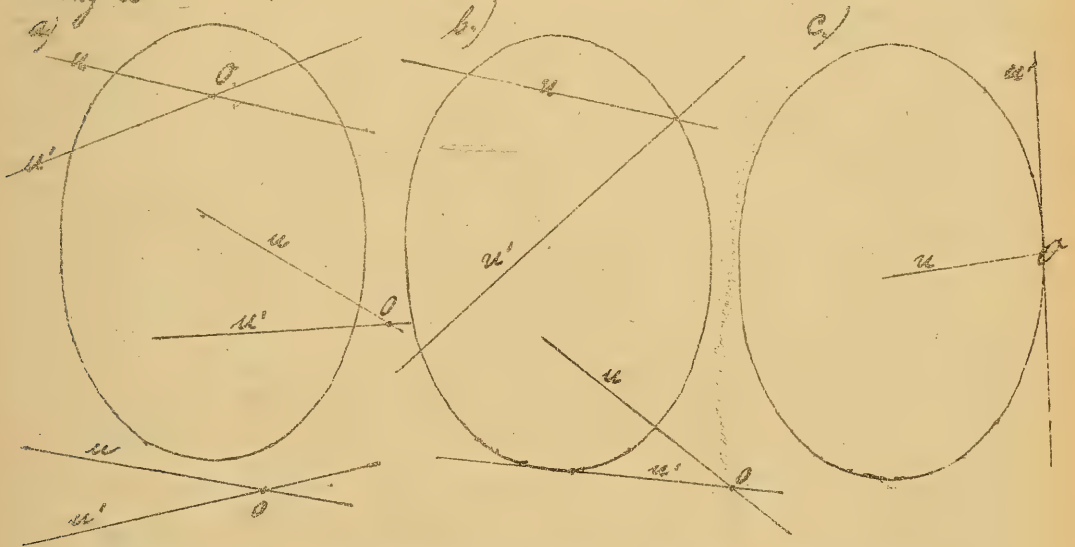
Zwei gerade Linien, die sich ausserhalb des Kegelschnittes begegnen mögen sie durch das Innere selbst laufen oder nicht, bilden einen imaginären Winkel (Fig. 26 a).

Zwei gerade Linien, die sich auf dem Kegelschnitt kreuzen, bilden einen Winkel, dessen Wert gleich 0 ist. (Fig. 26 b).

Zwei gerade Linien, von denen eine eine Tangente des Kegelschnittes ist, bilden einen unendlich grossen Winkel. (Fig. 26 b). Hier ist indess besonders zu berücksichtigen der Fall:

Zwei gerade Linien, von denen die einer eine Tangente

Fig 26



des Kegelschnittes ist, die andere aber durch den Berührungspunkt läuft, bilden einen unbestimmten Winkel (Fig. 26 c).

(Er müsste nach dem Vorstehenden ja auch gleichzeitig 0 und ∞ sein).

Dies wird eine vollständige Aufzählung der möglichen Fälle sein.

Stellen wir uns nun wieder auf den Standpunkt des Beobachters, der im Innern des absoluten Kegelschnittes sich nach hyperbolischer Maassbestimmung bewegen kann, so finden wir:

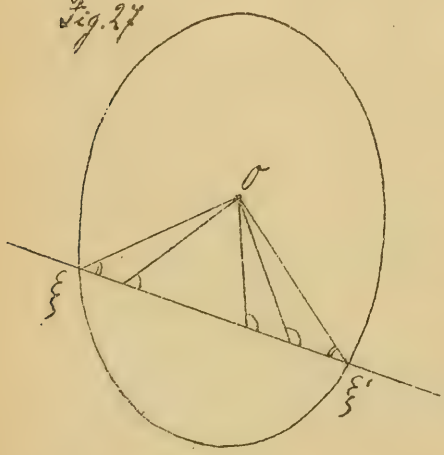
„Für unseren Beobachter hat die feste Gerade 2 unendlich weite Punkte ξ, ξ' und das ausserhalb des Kegelschnittes verlaufende Segment scheint für ihn nicht vorhanden, es hat für ihn nur ideale Bedeutung." Er kann wohl hinblicken, aber dasselbe nicht selbst erreichen, das Segment hat für ihn, wie man in der Optik sagt, „nur virtuelle Bedeutung."

Wie werden nun die Strahlen eines durch durch O laufenden Büschels bezüglich der festen Geraden zu klassifizieren sein?

Wir erkennen sofort:

Die von O auslaufenden geraden Linien zerfallen in 2 Kategorien, in solche, welche die gegebene Gerade treffen, und in solche, welche sie nicht treffen. Diese beiden Kategorien sind von einander geschieden durch 2 Strahlen, welche die gegebene gerade Linie im Unendlichen treffen und das je mit ihr einen Winkel 0 bilden."

Fig. 27



Unser Beobachter wird nun für die Linien $O\xi$ und $O\xi'$ auch einen Namen haben, er wird sie „parallel" nennen; denn er hat gelernt, solche Linien parallel zu nennen, die gerade die Grenzlagen des Schneidens ergeben. Daher können wir unser Ergebnis auch noch in folgender frappanteren Weise aussprechen:

„Dementsprechend gibt es von O aus für unseren Beobachter zwei parallele Linien zur gegebenen Linie, zwischen welchen solche gerade Linien des ferneren verlaufen, die die gegebene gerade Linie gar nicht treffen."

Werfen wir jetzt in Rücksicht hierauf einen Blick auf die elliptische und gewöhnliche Maassbestimmung in der Ebene, so finden wir:

Wenn wir die hyperbolische Maassbestimmung mit der elliptischen Geometrie, welche keine reellen, wohl aber zwei imaginäre Parallele kennt, — denn jede reelle Gerade schneidet ja den nullteiligen Kegelschnitt der elliptischen Geometrie in zwei konjugiert imaginären Punkten — und andererseits mit der gewöhnlichen Geometrie vergleichen, in der nur eine Parallele auftritt, so erscheint wieder die gewöhnliche Geometrie als ein Übergangsfall zwischen elliptischer und hyperbolischer Geometrie."

Wir wollen jetzt noch einige weitere Betrachtungen in der hyperbolischen Geometrie anstellen.

Wir beginnen mit der Darstellung der trigonometri-

schen Formeln. Schon in der letzten Vorlesung haben wir gesehen, daß dieselben übereinstimmen müssen mit den Formeln der sphärischen Trigonometrie auf einer Kugel vom Radius $\frac{2k}{i}$.

Wir gehen aus von den gewöhnlichen sphärischen Formeln für eine Kugel von Radius R:

1.) $\sin.\frac{A}{R} : \sin\frac{B}{R} = \sin.\alpha : \sin\beta.$

2.) $\cos.\frac{A}{R} = \cos.\frac{B}{R}\cos.\frac{C}{R} + \sin.\frac{B}{R}\sin\frac{C}{R}\cos.\alpha$, etc. —

Diese Formeln werden jetzt unverändert gelten müssen, wenn wir für R einsetzen $\frac{2k}{i}$. Wir stellen nun sogleich den Satz auf:

„Indem wir für R die rein imaginäre Größe $\frac{2k}{i}$ eintragen, entsteht aus den Formeln der sphärischen Trigonometrie ein neues reelles Formelsystem, in welchem bloß die cyklometrischen Funktionen durch zugeordnete hyperbolische Funktionen ersetzt sind."

Wir werden dies jetzt an einzelnen Beispielen erläutern haben. Es ist bekanntlich allgemein:

$$\cos.\frac{A}{R} = \frac{e^{i\cdot\frac{A}{R}} + e^{-i\cdot\frac{A}{R}}}{2}$$

Setzen wir für R ein $\frac{2k}{i}$, so kommt:

$$\cos.\frac{iA}{2k} = \frac{e^{-\frac{A}{2k}} + e^{+\frac{A}{2k}}}{2}$$

Wir erhalten also eine

Verbindung reeller Exponentialgrößen. Den Ausdruck rechts nennt man nun hyperbolischen Cosinus und schreibt ihn abkürzend: $\mathfrak{Cof}.\left(\frac{A}{2k}\right)$.

Ebenso behandeln wir jetzt den $\sin.\frac{A}{R}$. Es ist wieder zunächst:

$$\sin.\frac{A}{R} = \frac{e^{\frac{iA}{R}} - e^{-\frac{iA}{R}}}{2i}$$

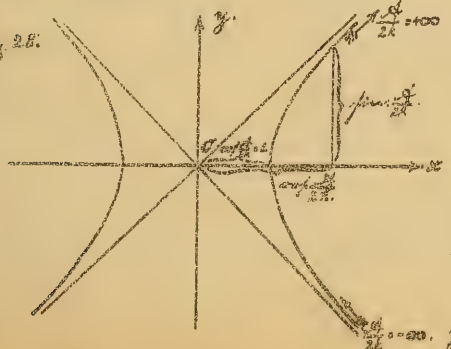
Hieraus ergiebt sich bei derselben Substitution $R = \frac{2k}{i}$:

$$\sin.\frac{iA}{2k} = \frac{-e^{-\frac{A}{2k}} + e^{\frac{A}{2k}}}{2i} = i.\left[\frac{e^{\frac{A}{2k}} - e^{-\frac{A}{2k}}}{2}\right].$$

Der Klammerausdruck rechts, welcher wieder durchaus reell ist, nennt man den hyperbolischen Sinus und schreibt ihn: $\mathfrak{Sin}.\left(\frac{A}{2k}\right)$.

Die Bezeichnung, hyperbolischer Cosinus und Sinus rührt von der Beziehung her, die zwischen ihnen besteht: $\mathfrak{Cof}.^2 - \mathfrak{Sin}.^2 = 1$. Dies giebt bekanntlich die Gl. einer gleichseitigen Hyperbel, wenn man den $\mathfrak{Cof}.$ als die x = Ordinate, den $\mathfrak{Sin}.$ als die y = Ordinate eines rechtwinkligen Systems deutet.

Fig. 25.



Wir haben so gefunden: Der cyklometrische cos. geht in den hyperbolischen $\mathfrak{Cof}.$ und der cyklometrische sin. in den mit i multiplicierten hyperbolischen $\mathfrak{Sin}.$ über.

Wenn wir nun diese Aenderung in unseren Grundformeln vornehmen, so werden wir sehen, alles Imaginäre fällt aus ihnen heraus. Nämlich wir bemerken:

„Die Formeln der sphaerischen Trigonometrie ergeben darum bei dieser Substitution etwas Reelles, weil die sin. in ihnen immer gepaart vorkommen."

Diese Verhältnisse hat man schon gekannt, bezw. beachtet, ehe man von hyperbolischer Geometrie etwas wußte. Man hat insofern der gewöhnlichen sphaerischen Geometrie eine „Pseudosphaerische Geometrie" zur Seite gestellt, d. h. eine Geometrie auf einer Kugel mit imaginärem Radius. Wenn wir nun dieses Wort aufnehmen, so können wir unser Resultat auch so aussprechen:

„Die Trigonometrie der mit hyperbolischer Maaßbestimmung ausgestatteten Ebene ist die pseudosphaerische Geometrie."

Wir gehen jetzt weiter dazu über von der Inhaltsberechnung gegebener Figuren in der hyperbolischen Ebene zu reden. Wir können allgemein, wie in der Flächentheorie gezeigt wird, den Inhalt einer ebenen oder krummen Figur sofort berechnen, wenn wir wissen, wie sich das Bogenelement $(ds)^2$ durch die auf die Fläche bezüglichen Coordinaten ausdrückt. Wir knüpfen wieder an die gewöhnliche Theorie der krummen Oberflächen an. Man setzt dort:

$(ds)^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ wo unter u und v beliebige Coordinaten auf der Fläche und unter E, F, G

geeignete Funktionen von u und v vorhanden sind. Für unsere mit hyperbolischer Maassbestimmung ausgestattete Ebene hatten wir nun ebenfalls bereits das Quadrat des Bogenelementes berechnet. Wir hatten gefunden:

$$(ds)^2 = \frac{dx^2+dy^2-\frac{(ydx-xdy)^2}{4k^2}}{\left(1-\frac{x^2+y^2}{4k^2}\right)^2},$$

wo bei unserer Betrachtung der absolute Kegelschnitt: $x^2+y^2-4k^2t^2=0$ zu Grunde lag. Wir wollen übrigens bemerken, dass wir stets die Gl. des beliebig gegebenen absoluten Kegelschnittes auf die Form bringen können, indem wir ein Polardreieck als Coordinatendreieck annehmen; wir sind also durchaus nicht gezwungen die Gl. $x^2+y^2-4k^2t^2=0$ stets als einen Kreis vom Radius $2k$, d.h. die x, y, t als homogene rechtwinklige Coordinaten der gewöhnlichen Ebene zu deuten. Wir erkennen also:

„Was man in der allgemeinen Flächentheorie u und v nennt, das sind hier insbesondere x und y, und das Quadrat des Bogenelementes hat dann die Gestalt:

$$ds^2 = \frac{dx^2+dy^2-\frac{(ydx-xdy)^2}{4k^2}}{\left(1-\frac{x^2+y^2}{4k^2}\right)^2} = \frac{\left(1-\frac{y^2}{4k^2}\right)dx^2+\frac{2xy}{4k^2}dxdy+\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right)dy^2}{\left(1-\frac{x^2+y^2}{4k^2}\right)^2}.$$

Die letzte Darstellung von ds^2 gestattet die Funktionen $E, 2F, G$ in unserem speciellen Falle sofort anzugeben, es sind eben entspr. die Coefficienten von $dx^2, dxdy$ und dy^2.

In der Flächentheorie drückt sich nun der Flächeninhalt eines bestimmte begrenzten Teiles der Fläche uns durch das über diesen Theil ausgedehnte Doppelintegral:

$$J = \iint du\,dv\,\sqrt{EG - F^2};$$ wir gehen auf eine Ableitung dieser Formel der Kürze halber nicht ein.

Diese Formel werden wir jetzt sofort auf unsere hyperbolische Ebene übertragen und erhalten, wenn wir für E, F, G die gefundenen Ausdrücke einsetzen:

$$J = \iint dx\,dy\,\frac{\sqrt{\left(1-\frac{y^2}{4k^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right)-\frac{x^2y^2}{16k^4}}}{\left(1-\frac{x^2+y^2}{4k^2}\right)^2}$$

Vereinfachen wir noch den Zähler dieser Formel, so bekommen wir schließlich:

$$J = \iint \frac{dx\,dy\,\sqrt{1-\frac{x^2}{4k^2}-\frac{y^2}{4k^2}}}{\left(1-\frac{x^2+y^2}{4k^2}\right)^2} = \iint \frac{dx\,dy}{\left(\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{4k^2}}\right)^3}$$

„Ist also der absolute Kegelschnitt durch die Gl. $x^2+y^2-4k^2t^2=0$ gegeben, so stellt sich der Flächeninhalt einer ebenen Figur durch das Doppelintegral dar:

$$J = \iint \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{4k^2}}}.$$

An diesem Doppelintegral sehen wir wieder, was schon oft bestätigt wurde, daß die gewöhnliche parabolische Maassbestimmung den Grenzfall der hyperbolischen Geometrie für $k = \infty$ darstellt. Setzen wir nämlich in unserer Formel $k^2 = \infty$, so erhalten wir die gewöhnliche Formel der elementaren Geometrie für den Flächeninhalt ebener Figuren: $\iint dx\,dy$.

Wenn wir dieselbe Rechnung für den Fall der elliptischen Maaßbestimmung durchgeführt hätten, so würden wir natürlich schließlich auf eine Formel gekommen sein, die sich von der obigen nur darin unterscheiden würde, daß für k^2 eingetreten ist $-k'^2$.

Wir wollen nun von unserer Formel eine Anwendung machen auf die hyperbolische Berechnung des Flächeninhaltes eines Dreiecks.

Fig. 29.

Bei der elliptischen Maassbestimmung ergab sich bei der Berechnung des Dreiecksinhaltes derselbe durch die Form:

$J = 4k'^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$, woraus man schließen konnte, daß der Excess $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ stets größer als 0 ist. Es muß sich diese Formel für J natürlich auch aus unserem Doppelintegral ergeben. Hieraus können wir aber sofort ersehen, was sich für den Dreiecksinhalt ergiebt, wenn wir hyperbolische Maassbestimmung zu Grunde legen. Wir werden erhalten müssen:

$$J = -4k^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

Bemerkung.: Es ist gut, das Schlussverfahren, welches wir hier angewandt haben, sich wohl zu überlegen. Man pflegt wohl zu sagen: Ein solches Schlussverfahren gründet sich auf die „Allgemeinheit der Analysis." Hiermit ist viel Missbrauch getrieben worden.

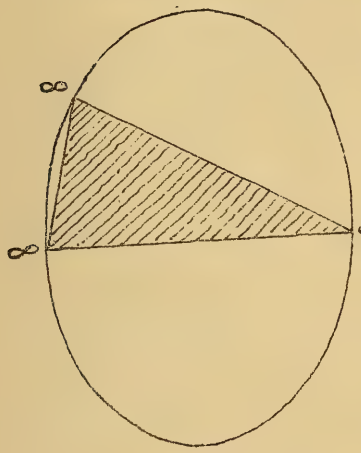
An die letzte Formel, die sich auf die hyperbolische Geometrie bezieht, wollen wir nun unsere weitere Discussion anknüpfen. Da der Flächeninhalt J jedenfalls positiv ist, so können wir sofort sagen:

„In der hyperbolischen Geometrie ist die Summe der Winkel eines Dreiecks kleiner als π und der Dreiecksinhalt ist dem absoluten Werte dieses negativen Excesses proportional."

Dies ist abermals ein merkwürdiger Unterschied von unseren früheren Resultaten. In der elliptischen Geometrie ist die Winkelsumme im Dreieck grösser als π, in der gewöhnlichen Geometrie gleich π, in der hyperbolischen endlich $< \pi$. Wir haben hier also eine ganz ähnliche Gegenüberstellung der drei Arten der Maassbestimmung, wie in der vorigen Stunde im Betreff der Parallelentheorie.

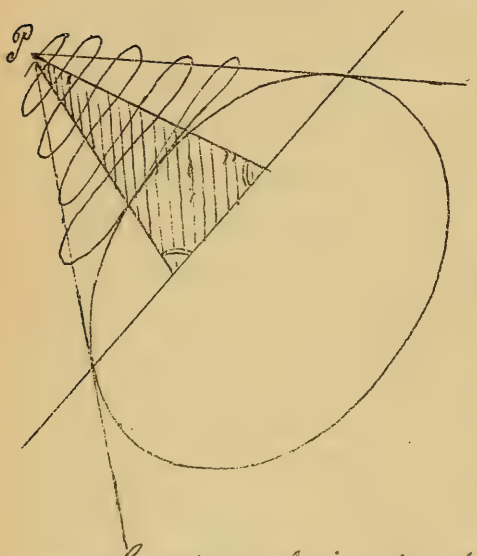
Wir wollen nun unser letztes Resultat an einigen Beispielen uns näher führen. Wir behaupten zuerst, dass wir z. B. sehr wohl in der hyperbolischen Geometrie ein Dreieck zeichnen können, dessen 3 Winkel einzeln

gleich 0 sind, so daſs dann sicher ihre Summe $< \pi$ ist. Es ist dies sehr einfach. Wir zeichnen das Dreieck so, daſs seine 3 Ecken auf dem absoluten Kegelschnitt liegen. Dann ist gewiſs jeder der 3 Winkel gemäſs früherer Betrachtungen gleich 0. Wir können auch noch sagen: „die drei Seiten des Dreiecks sind einander parallel;" denn jede schneidet die anderen in einem unendlich entfernten Punkte. Dieses enthält natürlich in der hyperbolischen Maass-bestimmung durchaus nichts Widersinniges. Das Widersinnige, das wir bei der ersten Kenntnisnahme solcher Sätze empfinden, bezieht sich immer darauf, daſs wir unwillkürlich an die Verhältnisse der gewöhnlichen Geometrie denken.



Nun wollen wir jedoch weiter sehen, ob wir nicht ein Dreieck konstruieren können, daſs 2 rechte Winkel hat. Nehmen wir die eine Seite zunächst beliebig an, doch so, daſs sie das Kegelschnittinnere durchsetzt, auf welches es hier allein ankommt. Wir errichten nun auf dieser Grundlinie zwei Perpendikel im hyperbolischen Sinne. Man sollte nun meinen, daſs das Dreieck, welches so entstehen wird, eine Winkelsumme gröſser als π, oder mindestens $= \pi$ haben müſste, da ja $2R$

schon unterbrochen sind. Doch fragen wir uns vorerst, wann steht eine gerade Linie überhaupt auf einer anderen senkrecht? Offenbar dann, wenn sie durch den Pol derselben geht.



Denn es wird ebendann, wie leicht zu zeigen, wenn man das entstehende Tangentialdreieck als Coordinatendreieck wählt, das Doppelverhältnis der beiden Linien mit den Tangenten aus ihrem Schnittpunkte den Wert −1 erhalten. Errichtet man daher auf der ersten Geraden zwei Senkrechte, so werden dieselben sich im Pol der Geraden, als in der dritten Ecke des Dreieckes schneiden müssen. Aber dieser Pol liegt hier außerhalb unseres Kegelschnittes. Nun denken wir uns einmal wieder in die Seele des Beobachters im Innern des Kegelschnittes hinein. Für ihn wird bei der angegebenen Lage des Pols dann durch die angeführte Construktion gar kein Dreieck entstehen, die beiden Perpendikel schneiden sich für ihn ja überhaupt nicht, es ist also für ihn nur eine offene Figur da. Und in der That bilden auch die beiden Perpendikel nach pag. 114. nur einen imaginären Winkel miteinander. Hierdurch ist dieser Einwand also entkräftet. Hiermit

wollen wir die Betrachtung der Flächeninhalts-Bestimmung beschließen.

Wir wenden uns nun weiter dazu, den Kreis in der hyperbolischen Geometrie zu behandeln.

Wir legen den absoluten Kegelschnitt wieder in der speciellen Form zu Grunde $\Sigma_{xx} = x^2 + y^2 - 4k^2 t^2 = 0$, indem wir ihn auf ein Polardreieck bezogen denken.

Wir werden dann am besten ausgehen von der Formel:

$$M(xx') = \frac{2k}{i} \cdot \arccos \frac{\Sigma_{xx'}}{\sqrt{\Sigma_{xx} \cdot \Sigma_{x'x'}}}.$$

Wir lassen dann den Punkt x' fest gegeben sein, den Punkt x dagegen als veränderlich. Soll dann x auf einem Kreise um x' sich bewegen, so muß stets sein Abstand $(M(xx'))$ vom Punkte x' constant sein. Hieraus ergibt sich ohne Weiteres als Gl. des Kreises in homogen-coordinaten Form:

$$\Sigma_{xx'} = \text{Const.} \sqrt{\Sigma_{xx} \Sigma_{x'x'}} \quad \text{oder rational gemacht:}$$
$$\Sigma_{xx'}^2 = \text{Const.}^2 \Sigma_{xx} \cdot \Sigma_{x'x'}.$$

Diese Gleichung ist vom 2. Grade in x, stellt also einen Kegelschnitt dar. Wir erkennen daher:

„Die Kreise der hyperbolischen Geometrie sind Kegelschnitte."

Nun wollen wir sehen, daß wir aus den Gleichungs-formen dieser Kegelschnitte noch einiges ablesen.

Setzen wir $\Sigma_{xx} = 0$, so kommt:

$\Sigma_{xx'}^{2} = 0$, dies aber stellt die doppelt gezählte Polare des Punktes x' in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt dar. In Worten lautet dieses Ergebnis:

„Stellen wir unseren Kreis mit dem absoluten Kegelschnitt zusammen, so kommt dasselbe heraus, als wenn wir ihn mit der doppelt zählenden Polaren zusammenstellen."

Dies läßt unmittelbar erkennen:

„Unser Kreis hat die Eigenschaft, den absoluten Kegelschnitt in denjenigen beiden Punkten zu berühren, in welchen derselbe von der Polaren des Kreismittelpunktes geschnitten wird."

Dieser Satz gestattet, wie leicht zu sehen, sofort auch die Umkehrung. Wenn wir daher einen Kegelschnitt construieren, der den absoluten Kegelschnitt in 2 Punkten berührt, so ist ersterer ein Kreis, dessen Mittelpunkt der Pol der Verbindungssehne ist.

„Durch diese Eigenschaft ist der Kreis also vollständig definiert, und es besteht ein Büschel concentrischer Kreise aus der Gesammtheit derjenigen Kegelschnitte, welche den absoluten Kegelschnitt in 2 festen Punkten berühren."

Jetzt wollen wir noch durch einige Figuren die letzten Verhältnisse deutlich machen. Wir können in

der hyperbolischen Geometrie drei Fälle solcher concentrischer Kreisschaaren unterscheiden, die sich je nach der Lage des Mittelpunktes x' sondern lassen

1.) Es liege x' im Innern des absoluten Kegelschnittes. Dann legt sich das Kreissystem um x' herum. Ist der absolute Kegelschnitt als Ellipse gezeichnet, was wir auch in den folgenden Fällen annehmen wollen, so besteht das System zunächst aus grösser und grösser werdenden Ellipsen, die um x' herumlaufen, für ∞ grossen Radius r erhalten wir den absoluten Kegelschnitt selbst. Dann geht das Büschel weiter zunächst in noch weiter gestreckten Ellipsen, dann in eine Parabel, endlich in Hyperbeln über, die schliesslich in der doppelt zählenden Polaren von x' sich zusammenziehen. (Fig. 32.)

2.) Liegt x' ausserhalb der Ellipse, so beginnt das System der Kreise zunächst mit der Polaren von x', an diese schliessen sich flache immer grösser werdende Ellipsen an, die schliesslich wieder in den absoluten Kegelschnitt als Grenzkreis für $r = \infty$ übergehen. Weiterhin folgen noch weitere Ellipsen, die dann mit einer Parabel als Zwischenlage in Hyperbeln übergehen, deren Grenze für den einen Winkelraum gerade die beiden Tangenten von x' an den Kegelschnitt bilden. Dann setzt sich das System fort in Hyperbeln, die im anderen Winkelraum liegen. Schliesslich erhält man das ausserhalb des absoluten Kegelschnittes verlaufende Segment der Polaren doppelt

gezählt (Fig. 33.)

3) Der dritte Fall, wo x' auf dem Kegelschnitt liegt, stellt den Uebergangsfall der beiden ersten dar. Die Polare von x' fällt dann mit der Tangente in x' zusammen. Wir bekommen als System der hyperbolischen concentrischen Kreisnaar dann zunächst größer und größer werdende Ellipsen im Innern des absoluten Kegelschnittes, die sämmtlich mit letzterem an einer festen Stelle eine vierpunktige Berührung haben. Im Grenzfall fällt wieder der absolute Kegelschnitt selbst auf, dann folgen noch weitere Ellipsen, die darauf vermittelst einer Parabel in Hyperbeln übergehen. Diese ziehen sich schließlich wieder in der doppelt zählenden Polaren von x' (der Tangente von x') zusammen. — Dieser dritte Fall ist daruach als ein Grenzfall anzusehen. Man nennt daher auch diese hyperbolischen Kreise in der nicht-euklidischen Geometrie: Grenzkreisen oder Horocyklen. Ihr Mittelpunkt ist von den Peripheriepunkten stets unendlich weit entfernt. (Fig. 34.)

Fig. 32.

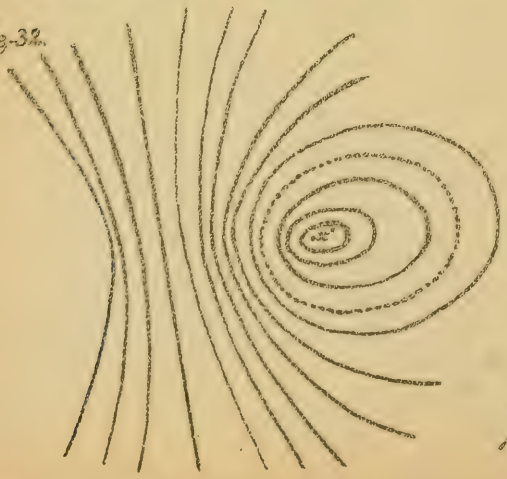


Fig. 33.

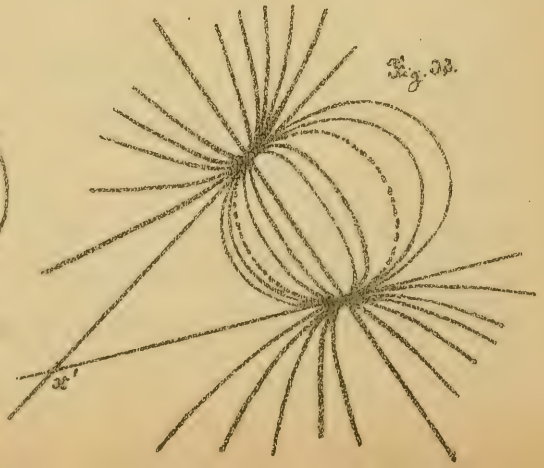


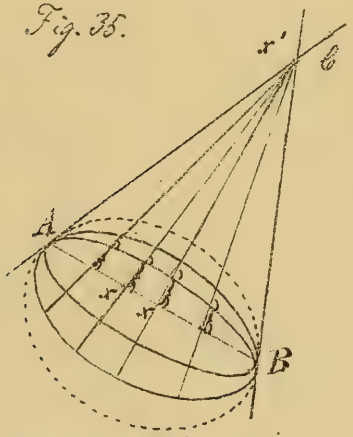
Fig. 34.

Wir wollen mit der Theorie der Kreise in der hyperbolischen Maassgeometrie noch weiter fortfahren. Denken wir uns wieder einmal einen mit hyperbolischer Maassbestimmung versehenen Beobachter im Innern des absoluten Kegelschnittes, wie werden diesem dann die verschiedenen Kreise erscheinen? Es kommen hier natürlich nur 3 Arten der Kreise in Betracht, welche nicht ausserhalb des Kegelschnittes selbst liegen. Wir erkennen leicht: Die Kreise, die ganz im Innern des Kegelschnittes liegen, wird der Beobachter Kreise schlechthin nennen (v. Fig. 32), die Kreise, deren Mittelpunkt auf dem absoluten Kegelschnitt liegt, (v. Fig. 34), werden für ihn Kreise mit unendlich

grossem Radius darstellen, sie werden ihm eben als die Grenzlagen erscheinen, denen sich die Kreise nähern, wenn ihr Radius unendlich gross wird. (Horocyclen oder Grenzkreise.).

Was aber wird er von der dritten Art von Kreisen sagen, deren Mittelpunkt als ausserhalb des absoluten Kegelschnittes gelegen für sein Bewusstsein nicht existieren wird? Wir haben schon auf pag. 126 gesehen, dass die Geraden durch den Pol C, welche den Kegelschnitt schneiden, auf der Verbindungssehne A B senkrecht stehen.

Fig. 35.



Ferner ist die Entfernung des Punktes C von den Punkten der Sehne A B eine Konstante, denn die Sehne A B gehört ja auch zu der Schaar der Kreise, die C zum Mittelpunkt haben.

Wir können diese Entfernung auch leicht ausrechnen; wir wollen dies einmal thun. Wir gehen aus von der Formel:

$$M(xx') = \frac{2k}{i} \text{ arc. cos. } \frac{\Sigma xx'}{\sqrt{\Sigma xx \, \Sigma x'x'}}$$

Nun ist $\Sigma_{xx'} = 0$, da x' auf der Polaren von x' liegen soll, wir erhalten daher sofort als die gesuchte Entfernung:

$$M(xx') = \frac{2k}{i} \text{ arc. cos } 0 = \frac{2k}{i} \cdot \left[\frac{\pi}{2} + K\pi\right].$$

oder

$$M(xx') = k\pi\left[\frac{1 + 2K}{i}\right], \text{ wo } K \text{ eine beliebige ganzzahlige}$$

Konstante sein möge.

Messen wir ferner von C aus nicht bis zur Verbindungs-
sehne AB, sondern bis zu den Punkten irgend eines anderen
der Kreise um C, so werden wir wieder diese Entfernungen,
wie es auch sein muss, unter sich gleich finden. Hieraus
folgt, dass auch die jedesmaligen Differenzen beider gemessenen
Entfernungen gleich sind; es ist dies ebenfalls ganz natürlich,
da es sich ja nur um die Radiendifferenz zweier concentrischer
Kreise handelt. Von diesen Verhältnissen wird der Beobachter
nun ausgehen, um die dritte Art der Kreise zu benennen.
Er wird nicht sagen, diese Kurven stellen uns Kreise dar,
sondern er wird diese Curven ansehen als die geometrischen
Oerter der Punkte, die jedesmal einen konstanten senk-
rechten Abstand von der Linie AB haben. Wir können dieses
Resultat zusammenfassend auch so ausdrücken:
„Dem Beobachter erscheinen die Kreise dritter Art als
die aequidistanten Kurven zu einer gegebenen geraden Linie."

Wir wollen nun sehen, dass wir noch weitere Eigenschaften
der Kreise konstatieren.

Wir stellen zunächst die Behauptung auf: Alle Radien
haben die Eigenschaft, die Kreise rechtwinklig (im Sinne der
hyperbolischen Maassgeometrie) zu treffen. Dies ist sehr leicht
analytisch nachzuweisen. Es sei der absolute Kegelschnitt,
auf ein Polardreieck bezogen, gegeben in der bekannten Form:

$x^2 + y^2 - k^2 t^2 = 0$. Wir wollen nun die Kreise betrachten,
die um $x=0,\ y=0$ und um $y=0,\ t=0$ gelegt sind; es sind

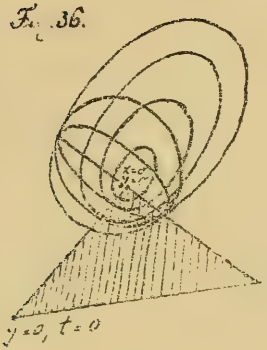
dies Kreise der ersten und der dritten Art.*) Die Gleichungsform der ersteren ist:

$$x^2+y^2=c^2t^2,$$

die Gleichungsform der letzteren:

$y^2-4k^2t^2=c^2x^2$, wo c eine reelle oder imaginäre Constante sein möge. Wir werden im folgenden die ganz gleichlaufenden Beweise für beide Arten der Kreise der Kürze halber zusammen behandeln und einander gegenüberstellen.

Fig. 36.



Wir wählen einen Punkt $x'y't'$ auf einem der Kreise beliebig aus und konstruieren in ihm die Tangente. Die Gleichung derselben lautet für die Kreise

erster Art:

$$xx'+yy'-c^2tt'=0$$

dritter Art:

$$yy'-4k^2tt'=c^2xx' \text{ oder:}$$
$$-c^2xx'+yy'-4k^2tt'=0.$$

Hieraus ergeben sich die Liniencoordinaten der betreffenden Tangente als:

$$\frac{u';\ v';\ w'}{x';\ y';\ -c^2t'} \qquad \text{resp.} \qquad \frac{u';\ v';\ w';}{-c^2x';\ y';\ -4k^2t'}$$

*) An sich genügt es, den Beweis für Kreise der ersten oder der dritten Art zu führen; von da aus folgt das allgemeine Resultat nach dem Prinzip von der Allgemeinheit der Analysis.

Diese Linie, welche den Punkt x' mit dem Mittelpunkt des Kreises $x=0;\ y=0$ resp. $y=0;\ t=0$ verbindet, ist dargestellt durch:

$$y'x - x'y = 0 \qquad \text{resp.} \qquad x'y - y't = 0$$

oder in Liniencoordinaten durch:

$$\frac{u'';\ v'';\ w''}{y';\ -x';\ 0} \qquad \frac{u'';\ v'';\ w''}{0;\ t';\ -y'}.$$

Wir haben nun zu zeigen, daß die beiden Linien u' und u'' auf einander senkrecht stehen. Um zunächst allgemein die Bedingung der Orthogonalität zweier Linien zu finden, stellen wir die Gleichung des absoluten Kegelschnittes in Liniencoordinaten dar, dieselbe lautet:

$$u^2 + v^2 - \frac{1}{4k^2} w^2 = 0.$$

Polarisieren wir dieselbe, so erhalten wir unmittelbar in der Form:

$$u'u'' + v'v'' - \frac{w'w''}{4k^2} = 0$$ die gewünschte Bedingung; denn diese Gleichung giebt an, daß das unserer Maaßbestimmung zu Grunde liegende charakteristische Doppelverhältnis für die Linien u' und u'' den Wert -1 annimmt.

Setzen wir nun in diese Gleichung für u', v', w' und u'', v'', w'' jedesmal die gefundenen Werte ein, so sehen wir, dieselbe wird identisch befriedigt. Hiermit ist bewiesen, was wir behauptet haben.

„Jeder Kreis schneidet auch in der hyperbolischen Geometrie seine Radien senkrecht."

Wir können diese Eigenschaft geradezu als Definition des Kreises wählen und daher auch den Satz aussprechen: „Concentrische Kreise sind die rechtwinkligen Trajectorien eines Büschels."

Wir wollen nun noch in einem letzten kleinen Kapitel betrachten: „Die Kinematik in der hyperbolischen Geometrie." Was haben wir allgemein unter „Kinematik" zu verstehen? Wir fassen unter diesem Namen die Untersuchungen über die Bewegungen und kongruenten Verschiebungen der Figuren in der Ebene zusammen. *) Wir hätten die kongruenten Bewegungen auch bereits in der gewöhnlichen Geometrie vom projectiven Standpunkte aus betrachten können und nur um den ersten Teil der Vorlesung noch vor Weihnachten zu beenden, sind wir dazu geführt, es bis jetzt aufzusparen. Wir wollen daher im folgenden zwischendurch auch auf die Bewegungen in der Ebene der gewöhnlichen Geometrie eingehen.

Die allgemeinste projective Beziehung zweier Ebenen wurde bekanntlich gegeben durch die Gleichungen

---

*) Es wird vielleicht auffallen, dass wir alle diese Untersuchungen erst in der hyperbolischen Maßgeometrie anstellen, in der Behandlung der elliptischen Geometrie sie dagegen übergangen haben, es ist dies einfach aus dem Grunde geschehen, weil jetzt uns die direkte Anschauung infolge der Realität des absoluten Kegelschnittes zu Hilfe kommt.

$$\varrho\, x_1' = a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 ;$$
$$\varrho\, x_2' = a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 ;$$
$$\varrho\, x_3' = a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 .$$

Während wir nun bei diesen Formeln bisher die x und x' als Punkte verschiedener Ebenen gedeutet haben, wollen wir uns jetzt die Vorstellung bilden, daß durch x und x' Punkte derselben Ebene dargestellt würden. Es wird dann durch unsere Formeln jedem Punkte der Ebene ein anderer Punkt dieser Ebene zugeordnet. Die nächste Frage zeigt uns sofort den Unterschied von unserer bisherigen Deutung der Substitutionsformeln; sie wird eben erst bei der neuen Deutung möglich. Um die Frage zu beantworten, werden wir $x' = x$ setzen, es sollen dann x_1, x_2, x_3 und ϱ so bestimmt werden, daß die 3 Gleichungen bestehen:

$$(a_{11} - \varrho)\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 = 0 ;$$
$$a_{21}\, x_1 + (a_{22} - \varrho)\, x_2 + a_{23}\, x_3 = 0 ;$$
$$a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + (a_{33} - \varrho)\, x_3 = 0 .$$

Falls diese 3 Gleichungen nicht allein durch das Wertesystem $x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0$ befriedigt werden sollen, das für uns bedeutungslos ist, muß die Determinante der Coefficienten gleich 0 sein. Es ergiebt sich also als Resultat der Elimination von x_1, x_2, x_3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

Dies ist eine kubische

Gleichung für ϱ, welche uns im allgemeinen drei von einander verschiedene Wurzeln $\varrho_1 : \varrho_2 : \varrho_3$ liefert. Jede dieser Wurzeln für ϱ in die ursprünglichen Gleichungen substituiert, liefert uns drei zusammengehörige Werthe für $x_1 : x_2 : x_3$. Es ist nämlich für $\varrho = \varrho_i$ eine der 3 Gleichungen Folge der beiden anderen, wir können sie einfach weglassen und erfahren dann aus den beiden anderen $x_1 : x_2 : x_3$. Wir erhalten daher das Resultat, daß drei Punkte der Ebene bei der Transformation in sich selbst übergehen. Diesen Satz können wir, wie leicht zu sehen, sofort verallgemeinern:

„Wenn man ein Gebiet von n homogenen Variabeln durch eine lineare Substitution in sich selbst transformiert, so giebt es dabei n festbleibende Punkte," wenn jeden Einwand in Betreff der Allgemeinheit dieses Satzes von vornherein zu beseitigen, fügen wir noch hinzu, „vorbehaltlich näherer Untersuchungen in speciellen Fällen, wo vielfache Wurzeln jener Gleichungen auftreten."

Nachdem wir uns so gewöhnt haben, eine Ebene projectivisch oder collinear auf sich selbst zu beziehen, fragen wir uns weiter: Welche Collineationen haben speciell den Charakter der Bewegung, mit anderen Worten, welche Collineationen kommen einfach darauf hinaus, daß mit der Ebene nur eine congruente Verschiebung vorgenommen ist? Wenn wir in der gewöhnlichen Ebene

Bewegungen irgend welcher Figuren ausführen, so bleiben alle Maassverhältnisse dieselben. Es hängt dies damit zusammen, daß die unendlich ferne Gerade oder vielmehr die imaginären Kreispunkte von den Bewegungen der Ebene nicht berührt werden; wir müssen darauf später noch zurückkommen. So werden wir auch in der hyperbolischen Geometrie diejenigen Collineationen, bei denen die Maassverhältnisse dieselben bleiben, als blose Bewegungen der Ebene bezeichnen. Wir können nun offenbar hier gleich einen Schritt weiter gehen und sagen:

„Bei der hyperbolischen Maasbestimmung werden alle Maasverhältnisse, bei denjenigen und nur bei denjenigen Collineationen der Ebene in sich erhalten bleiben, welche die Eigenschaft haben, den absoluten Kegelschnitt in sich überzuführen."

Infolge dessen wollen wir diese Collineationen als Bewegungen der hyperbolischen Ebene in sich bezeichnen, und die Lehre von den Bewegungen dieser Ebene giebt uns eben das, was wir als „Kinematik" der hyperbolischen Geometrie bezeichnen wollen.

Suchen wir nun uns darüber klar zu machen, wie viele Bewegungen in der hyperbolischen Geometrie es überhaupt geben mag. Wir sahen zunächst, es giebt ∞^8 Collineationen, darunter den 9 Constanten, die eine Collineation bestimmen, wie ihr Verhältnis wesentlich ist. Diese ∞^8 Collineationen werden

einen gegebenen Kegelschnitt wieder einem Kegelschnitt entsprechen lassen. Nun gibt es ∞^5 verschiedene Kegelschnitte in der ganzen Ebene; daraus schließen wir, daß es ∞^3 Collineationen des gegebenen Kegelschnittes in sich gibt – ebenso ∞^3 Collineationen, die einen gegebenen Kegelschnitt in einen beliebigen anderen gegebenen Kegelschnitt überführen. Dies ist ein sehr wichtiger Satz, den wir so gefunden haben, auch für andere Gebiete der Mathematik:

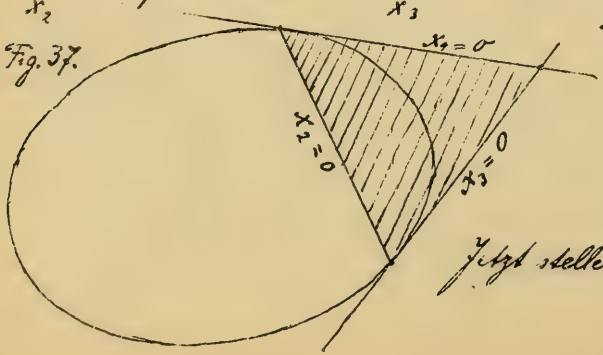
„Ein Kegelschnitt der Ebene geht durch dreifach unendlich viele Collineationen der Ebene in sich über, und es gibt also in der hyperbolischen Geometrie dreifach unendlich viele Bewegungen."

Es sei jetzt der absolute Kegelschnitt der hyperbolischen Maassbestimmung wirklich gezeichnet. Wir haben nun früher gelernt, den einzelnen Punkt des Kegelschnittes durch einen Parameter λ zu bezeichnen. Wir gingen davon aus, daß der Kegelschnitt, auf ein Tangentialdreieck bezogen, in der Form $x_1 x_3 - x_2^2 = 0$ dargestellt sei. Setzen wir dann $\frac{x_1}{x_2} = \lambda$, so wird auch $\frac{x_2}{x_3} = \lambda$ oder:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \lambda^2 : \lambda : 1 = \\ = \lambda_1^2 : \lambda_1 \lambda_2 : \lambda_2^2,$$

wo noch $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ gesetzt ist.

Fig. 37.



Jetzt stellen wir die Frage auf:

Wann wird durch eine Collineation der Ebene unser Kegelschnitt in sich selbst übergeführt? Soll dies stattfinden, so muß aus jedem Punkte des Kegelschnittes ein anderer Punkt desselben werden. Der transformierte Kegelschnitt wird infolge dessen durch die Gleichung:

$x_1 : x_2 : x_3 = \lambda_1'^2 : \lambda_1' \lambda_2' : \lambda_2'^2 = \lambda'^2 : \lambda' : 1$ dargestellt.

Zwischen den Parametern λ und λ' muß dann eine bestimmte Abgleichung bestehen, die wir zunächst unbestimmt ausdrücken wollen durch $\lambda' = \varphi(\lambda)$. Was wird dies nun für eine Funktion φ sein? Wir wollen dies auf zwei verschiedene Weisen ableiten: einmal, indem wir functionentheoretisch schließen, dann jedoch auch vermittelst analytischer Rechnung, damit der Weg mit Hülfe der Functionentheorie, den wir später übrigens noch öfter, da er einfacher ist, einschlagen werden, nicht gewissermaßen als ein deus ex machina erscheint, sondern in engem Zusammenhang mit unseren bisherigen Betrachtungen tritt – vermöge gewöhnlicher Rechnung jedesmal controlierbar erscheint.

Wenn wir die ganze Ebene einer Collineation unterwerfen, so ist dies doch eine ausnahmslose ein-eindeutige Transformation der Punkte der Ebene. Also wird auch der Kegelschnitt, wenn er einmal in sich selbst übergeht, ein-eindeutig in sich selbst übergeführt werden. Wir erkennen

so, daß λ eine eindeutige Funktion von λ' sein muß, deren Umkehrung eine eindeutige Funktion von λ als Beziehung von λ' ergeben muß, und zwar ohne jede Ausnahme eben für einzelne Werte von λ oder λ'.

Nun sagen wir weiter: es muß aber auch eine analytische Funktion sein, bei der alles bisher von ihr Ausgesagte ebenso wohl für imaginäre wie für reelle Werte von λ oder λ' gilt.

Wir erkennen dies so: λ hängt in analytischer Weise von den x ab, die x aber werden analytisch transformiert in die x', von den x' hängt wieder λ' analytisch ab, folglich ist auch die Beziehung zwischen λ und λ' eine analytische. Also ist φ eine eindeutige, eindeutig umkehrbare analytische Funktion, die nirgendwo, auch beispielsweise bei $\lambda = \infty$ nicht, sich „wesentlich" singulär verhält. Hieraus folgt sofort, wie in der Funktionentheorie gezeigt wird, daß φ nur eine linear gebrochene Funktion sein kann.

Wir haben:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta} \quad \text{oder homogen geschrieben:}$$

$$\begin{aligned} \rho\lambda_1' &= \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 \,, \\ \rho\lambda_2' &= \gamma\lambda_1 + \delta\lambda_2 \,. \end{aligned}$$

Es ist der so gefundene Satz sehr wichtig, besonders wichtig für spätere Entwicklungen. Wir haben also

das zunächst funktionentheoretisch gefundene Resultat:

„Wenn bei einer Collineation einer Ebene in sich ein Kegelschnitt in sich verwandelt wird, so erfährt der Parameter λ, durch den wir den einzelnen Kegelschnittpunkt darstellen, selbst eine lineare gebrochene Substitution oder die homogenen λ_1 und λ_2, in welche man λ spaltet, eine binäre lineare Substitution." Wir wollen gleich noch hinzufügen:

„Eine Behauptung, welche auch genau umkehrbar ist, so daß jede lineare Substitution des λ auf eine Collineation hinführt, die die ganze Ebene und dabei den Kegelschnitt in sich selbst überführt."

Wir wollen jetzt kurz noch die analytische Rechnung durchführen, die uns zu eben diesen Resultaten führen wird. Wir gehen wieder darauf zurück, daß der absolute Kegelschnitt, auf sein Tangentialdreieck bezogen, in der Form gegeben ist: $x_1 x_3 - x_2^2 = 0$ oder, indem wir die Parameterdarstellung wählen, durch

$$\lambda = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3}$$

Es sei nun eine Collineation gegeben durch die Formeln:

$$\begin{aligned}
\varrho\, x_1' &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \;; \\
\varrho\, x_2' &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \;; \\
\varrho\, x_3' &= a_{31} x_1 + a_{33} x_2 + a_{33} x_3 \,.
\end{aligned}$$

Diese Collineationen soll die Eigenschaft haben, den absoluten Kegelschnitt in sich selbst überzuführen. Nach der Substitution muß daher derselbe wieder durch die Gleichung dargestellt werden: $x_1' x_3' - x_2'^2 = 0$. Setzen wir also in diese Gleichung für x_1', x_2', x_3' die Werte der Substitutionsformeln ein, so müssen wir links ein Multiplum von $x_1 x_3 - x_2^2 = 0$ erhalten. Wir können demnach setzen:

$x_1' x_3' - x_2'^2 = \varrho^{(u)}(x_1 x_3 - x_2^2)$ oder nach Auflösung der Substitution:

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)^2 = \varrho^{(u)}(x_1 x_3 - x_2^2).$$

Da diese Gleichung dann für jeden Wert von x_1, x_2, x_3 identisch erfüllt sein muß, so ergeben sich eine ganze Reihe Bedingungsgleichungen, denen die Coefficienten der Transformation notwendig genügen müssen, die aber auch gerade hinreichend sein würden, damit durch die angegebene Substitution der absolute Kegelschnitt in sich transformiert wird. Es wird so z.B. der Coefficient von x_3^2 links gleich 0 sein müssen. Dies ergiebt die Bedingung $a_{13}\,a_{33} - a_{23}^2 = 0$

Wir wollen die übrigen Bedingungen nicht weiter

ausrechnen, sondern gleich den Zusammenhang von λ und λ' aufsuchen. Es ist nach Einführung der Parameterdarstellung für den transformierten Kegelschnitt: $\lambda' = \frac{x_1'}{x_2'} = \frac{x_2'}{x_3'}$ oder, wenn wir beide Ausdrücke in einen zusammenziehen wollen: $\lambda' = \frac{m x_1' + n x_2'}{m x_2' + n x_3'}$,

wo wir für m und n irgend welche Zahlen wählen können. Wir wollen setzen: $\lambda' = \frac{a_{23} x_1' - a_{13} x_2'}{a_{23} x_2' - a_{13} x_3'}$.

Wir werden gleich erkennen, weshalb gerade diese Darstellung gewählt ist. Wenn wir nämlich für x_1', x_2', x_3' ihre Werte aus den Substitutionsformeln einsetzen, so kommt:

$$\lambda' = \frac{a_{23}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) - a_{13}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)}{a_{23}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) - a_{13}(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)}$$

und hier heben sich jetzt, im Zähler wie im Nenner, im Nenner wegen der von uns gefundenen Bedingung $a_{13}a_{33} - a_{23}^2 = 0$, die Glieder mit x_3 gerade fort. Wenn wir nun Zähler und Nenner noch durch x_2 dividieren, so kommt, da $\frac{x_1}{x_2} = \lambda$ ist:

$$\lambda' = \frac{a_{23}(a_{11}\lambda + a_{12}) - a_{13}(a_{21}\lambda + a_{22})}{a_{23}(a_{21}\lambda + a_{22}) - a_{13}(a_{31}\lambda + a_{32})} = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}.$$

Wir sehen, daß in der That λ' eine lineare gebrochene Funktion von λ wird. Hierdurch ist dann dargelegt,

dass wirklich das funktionentheoretisch gefundene Resultat richtig ist. *)

Kehren wir nun zu den früheren Betrachtungen zurück. Wir haben gelernt, dass bei jeder Collineation 3 Punkte festbleiben. Nun sehen wir, dass unsere specielle Collineation, bei welcher der absolute Kegelschnitt in sich selbst übergeht, die Eigenschaft hat, dass zwischen den Parametern λ und λ' die Beziehung besteht:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta},$$ oder homogen geschrieben: $\varrho\lambda_1' = \alpha\lambda_1 + \beta\cdot\lambda_2,$
$$\varrho\lambda_2' = \gamma\lambda_1 + \delta\lambda_2.$$

---

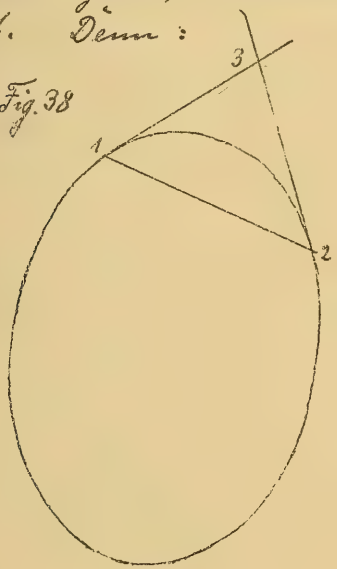
*) Wir wollen jedoch darauf hinweisen, dass diese Verificierung des funktionentheoretischen Beweises nicht erforderlich war, da der erste Beweis natürlich ebenso streng ist, es ist dies nur geschehen, um mit der Neuheit jenes Schlussverfahrens leichter vertraut zu machen. — Rückwärts sollte jetzt im Texte gezeigt werden (was der Kürze halber unterbleibt), dass auch jede Substitution $\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}$, auf dem Kegelschnitt gedeutet, eine Collineation der Ebene ergiebt. In den drei Constanten $\alpha : \beta : \gamma : \delta$ haben wir dann den Beleg dafür, dass es wirklich dreifach unendlich viele Collineationen der Ebene giebt, die den Kegelschnitt in sich überführen.

In Worten lautet dieses Ergebnis:

„Wenn die x der Ebene eine ternäre Substitution erfahren, bei welcher der Kegelschnitt in sich übergeht, so erleiden die λ_1, λ_2 auf dem Kegelschnitte eine binäre Substitution."

Wir können hieraus sofort schließen, daß zwei Punkte des Kegelschnittes fest bleiben, gemäß des früher ausgesprochenen allgemeinen Satzes. Wenn wir diese beiden Punkte einmal als reell zeichnen, so sehen wir auch sogleich, welches der dritte feste Punkt der Bewegung ist. Denn:

Fig. 38



Mit den beiden Punkten des Kegelschnittes bleiben auch ihre Tangenten und damit der Schnittpunkt derselben fest, womit die sämmtlichen 3 festbleibenden Punkte der Ebene bestimmt sind."

Dies gilt dann sofort allgemein, unabhängig von den gerade vorliegenden Realitätsverhältnissen.

Wir können übrigens die folgenden 3 Fälle unterscheiden: Sind die festbleibenden Punkte des Kegelschnittes reell, so liegt der dritte feste Punkt außerhalb des Kegelschnittes. sind die ersteren Punkte konjugiert imaginär, so liegt der dritte feste

Punkt im Inneren des Kegelschnittes. Endlich haben wir noch als Übergangsfall den Fall zu betrachten, wo die beiden festbleibenden Punkte des Kegelschnittes in einen reellen Punkt zusammenfallen, dann fällt auch der dritte feste Punkt in diesen hinein. Wir werden nun eine Bewegung, bei der der reelle Punkt 3 festbleibt, eine Drehung um 3 nennen; jeder Punkt wird eben bei der Bewegung der hyperbolischen Ebene einen Kreis um jenen Punkt 3 beschreiben müßen, da doch sein Abstand vom Punkte 3 konstant bleiben soll. Wir haben so zusammenfassend das Ergebnis:

„Hiernach besteht jede Bewegung der hyperbolischen Ebene aus einer Drehung, bei welcher ein Punkt der Ebene, der innerhalb oder außerhalb oder auf dem Kegelschnitte liegt, festbleibt."

Wenn wir uns nun weiter fragen, wie sich die Bewegung dann dem mit hyperbolischer Maassbestimmung ausgerüsteten Beobachter darstellen wird, so können wir in Rücksicht auf die 3 unterschiedenen Fälle sagen:

„Liegt der feste Punkt im Innern des Kegelschnittes, so hat man eine Drehung ganz wie in der elementaren Geometrie, die bei einer Drehung um 2π in die ursprüngliche Lage zurückführt (Fig. 39.). Im zweiten Falle hat man eine Bewegung um ein ∞ fernes Centrum, wobei alle Punkte Horocyclen beschreiben, und man

niemals zur Anfangslage zurückkommt. (Fig. 40.).
Im dritten Falle haben wir gleichfalls eine unperiodische (d. h. eine nicht zur Anfangslage zurückführende) Bewegung, bei der alle Punkte etwa von der Stelle 2 aus nach der Stelle 1 hin zu wandern scheinen." (Fig. 41.).

Diese dritte Fall wird jedoch dem Beobachter offenbar nicht als eine Drehung der Ebene erscheinen, (weil es sich kein Zentrum der Bewegung konstruieren kann), vielmehr wird er von dieser Bewegung sagen:

„Bei der dritten möglichen Bewegungsart wird eine gerade Linie in sich selbst verschoben, und alle Punkte der Ebene beschreiben äquidistante Curven. (nicht etwa gerade Linien, wie bei der gewöhnlichen Maassbestimmung."

Fig. 39.)

Fig. 40.)

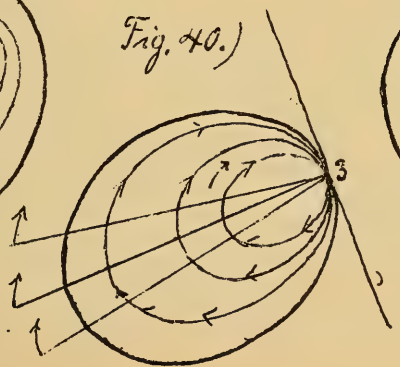
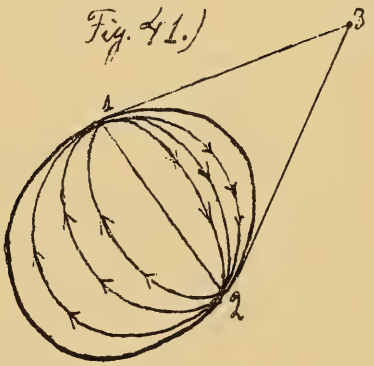


Fig. 41.)



Es besteht jedoch, was die Kinematik angeht, noch ein anderer fundamentaler Unterschied der hyperbolischen von der gewöhnlichen Maaßgeometrie.

Wir haben in der ersteren dreifach ∞viele Bewegungen als möglich erkannt, ebenso viele Bewegungen gibt es auch im Falle der gewöhnlichen Geometrie. Im Falle der hyperbolischen Geometrie haben wir diese ∞^3 Bewegungen soeben schlechtweg als diejenigen Collineationen definiert, die den absoluten Kegelschnitt in sich überführen. Das Gleiche könnte man nun, sollte man meinen, von der gewöhnlichen Geometrie behaupten und sagen: Die Bewegungen der gewöhnlichen Ebene sind die Collineationen, bei denen die Kreispunkte in sich übergeführt würden. Dieser Satz ist nicht richtig, wohl aber seine Umkehr, daß es sich nämlich bei jeder Bewegung um eine Collineation handelt, bei der die Kreispunkte unverändert bleiben. Es gibt eben noch andere Collineationen, bei denen die Kreispunkte in sich übergeführt werden, ohne daß dies Bewegungen sind. Wir erkennen dies leicht so: Es gibt überhaupt ∞^8 Collineationen, Punktepaare dagegen gibt es ∞^4. Wir schließen hieraus, daß jedes Punktepaar durch ∞^4 Collineationen in sich übergeführt wird: „Der hyperbolischen Theorie entgegen bleiben daher in der gewöhnlichen Geometrie die Kreispunkte bei vierfach unendlich vielen Collineationen ungeändert,

trotzdem es nur dreifach unendlich viele Bewegungen giebt."

Wir können dies leicht noch weiter verfolgen. Die Winkel zweier Strahlen müssen bei den in Rede stehenden Transformationen ungeändert bleiben, da sie definiert sind durch das Doppelverhältnis dieser Strahlen mit den Strahlen nach den imaginären Kreispunkten, dagegen die Entfernungen brauchen nicht dieselben zu bleiben, weil sie überhaupt nicht durch die Kreispunkte allein, sondern erst nach Annahme der Längeneinheit definiert waren, vielmehr können sie proportional vergrößert oder verkleinert werden. Wir können so unserem letzten Satze noch hinzufügen:

„Es liegt dies eben daran, weil zu den Bewegungen noch die Aehnlichkeitstransformationen ($x' = mx$, $y' = my$) als Collineationen, die die Kreispunkte ungeändert lassen, hinzutreten."

Wir wollen diesem Satze jedoch die umgekehrte Wendung geben; denn uns liegt daran, die Abweichung der gewöhnlichen und hyperbolischen Geometrie darzulegen. Wir sagten schon, daß es im hyperbolischen Falle nur ∞^3 Collineationen giebt, die den fundamentalen Kegelschnitt in sich transformieren.

„Für die Aehnlichkeitstransformation ist in der

hyperbolischen Geometrie daher ebenso wenig Platz, wie in der elliptischen Geometrie."

Wenn wir uns daher einmal die Aufgabe stellen wollten, in der hyperbolischen Geometrie zu einem gegebenen Dreieck ein anderes jenem aehnliches zu zeichnen, das vielleicht den doppelten Inhalt hat, so werden wir bald einsehen, dass diese Aufgabe zu lösen undenkbar ist. Wir wissen dies eigentlich schon von früher her. Denn, wie wir gesehen, drückt sich der Inhalt eines Dreiecks aus durch $\Delta = 4k^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma)$. Wenn es daher möglich wäre, ein dem ersten ähnliches Dreieck mit doppeltem Inhalt zu zeichnen, so müsste ja auch der Excess sich verdoppelt haben, was zu einem Widerspruch mit der Forderung der Aehnlichkeit führt, die doch Winkelgleichheit verlangt.

„Die Bemerkung, dass es keine Aehnlichkeitstransformationen giebt, stimmt daher mit dem Umstande, dass wir den Inhalt eines Dreiecks durch die Winkel allein berechnen können."

Dieses giebt uns noch Anlass zu folgender kleinen Betrachtung. Wir fragen uns: Welches ist der grösste Inhalt, den ein Dreieck überhaupt in der hyperbolischen Geometrie haben kann? Diese Frage ergiebt sich sofort identisch mit der, welches die kleinsten Winkel

sind, die in einem Dreieck vorkommen können. Wir erinnern uns, daß wir bereits ein Dreieck betrachtet haben, dessen 3 Ecken auf dem Kegelschnitte lagen; in ihm war jeder Winkel gleich 0. Kleiner können die Winkel natürlich nicht werden.

„Wir kommen so zu dem merkwürdigen Ergebnis, daß es in der hyperbolischen Geometrie ein Maximum für den Dreiecksinhalt giebt, nämlich die Zahl $4k^2\pi$."

Anmerkung: Wir werden bald Gelegenheit haben, auf diesen Satz zurückzuleiten. Wenn wir die historische Entwicklung der nicht-euklidischen Geometrie betrachten, dann müssen wir auf einen Brief des jugendlichen Gauß an seinen Studiengenossen Bolyai vom Jahre 1799 aufmerksam machen. Hier sagt Gauß: Man könne sich eine Geometrie konstruieren, für die das Parallelenaxiom nicht gültig sei. Wenn man jedoch annehme, daß es für den Dreiecksinhalt eine obere Grenze nicht gebe, so könne man die euklidische Geometrie beweisen. Anderenfalls käme man zu einer anderen Geometrie, (nämlich eben derjenigen, welche wir hier die hyperbolische Geometrie nennen.)
(v. Schering, Gedächtnisrede zum 100. jähr. Geburtstage von Gauss, pag. 7. (1877.)).

Wir wenden uns nun noch kurz zu der

3. parabolischen Maassbestimmung. Indem wir

uns der früheren Entwickelungen für das binäre Gebiet erinnern, dürfen wir gleich die allgemeine Definition an die Spitze stellen:

„Die parabolische Geometrie ist ein Grenzfall der elliptischen Geometrie oder der hyperbolischen, welcher entsteht, wenn der absolute Kegelschnitt sich in ein Paar imaginärer Punkte auflöst und gleichzeitig k bezw. k' ins Unendliche wächst."

Statt des Wortes „Grenzfall" wollen wir noch ergänzend hinzufügen.

„Sie ist auch ein Übergangsfall zwischen elliptischer und hyperbolischer Geometrie, insofern das Paar imaginärer Punkte ein Übergangsfall zwischen einteiligen und mehrteiligen Kegelschnitten ist."

Wir wollen jetzt auf die parabolische Geometrie selbst eingehen, aber nur ganz kurz. Derselben liegen also 2 imaginäre Punkte als absoluter Kegelschnitt zu Grunde, ganz dementsprechend, daß wir bei der gewöhnlichen Maaßbestimmung in der Ebene die beiden Kreispunkte zu Grunde zu legen hatten. Wir wollen nun in der That zeigen:

„Wir erhalten im parabolischen Falle ein Formelsystem, welches sich mit dem der gewöhnlichen Geometrie deckt, sobald wir die imaginären Grundpunkte insbesondere mit den Kreispunkten

zusammenfallen lassen."

Wir wollen nun der Gl. des absoluten Kegelschnittes in Liniencoordinaten ausgehen, dieselbe möge lauten

$\Phi(u_1, u_2, u_3) = \sum a_{ik}\, u_i\, u_k = 0$. Wir erhalten hieraus in bekannter Weise die Darstellung des Kegelschnittes in Punktcoordinaten, wenn wir die Determinante der Coefficienten mit den x rändern, wie folgt:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = \sum a_{ik}\, x_i\, x_k .$$

Nun wollen wir von dieser Gleichung $\sum a_{ik}\, x_i\, x_k = 0$ wieder übergehen zur Gleichung in Liniencoordinaten, welche durch die mit $u_1\ u_2\ u_3$ geränderte Determinante der Coefficienten gegeben wird, dieselbe lautet:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Es ist dann, wie bereits früher dargelegt, die linke Seite

identisch $= \Delta \cdot \Phi(u_1, u_2, u_3)$, wo Δ die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$ bezeichnet. Diesen Formelcyklus werden wir im

Folgenden zu benutzen haben.

Wir wollen nun den Winkel zweier geraden Linien u und u' definieren durch:

$$M(uu') = \text{arc. cos.} \frac{\Phi(uu')}{\sqrt{\Phi(uu).\Phi(u'u')}}$$ in uns bereits bekannter Weise; hieran ändert sich nichts, auch wenn wir jetzt, um zum parabolischen Falle zu kommen, die Determinante von Φ gleich Null setzen sollten.

Zur Bestimmung der Entfernung zweier Punkte dagegen wollen wir uns der arc. sin.-Formel bedienen, da diese für den beabsichtigten Grenzübergang am geeignetsten ist. Wir setzen:

$$M(xx') = \frac{2k}{i} \text{ arc. sin. } i \frac{\sqrt{S_{xx'}}}{\sqrt{F_{xx}.F_{x'x'}}},$$ wo $S_{xx'}$ nichts anderes ist als die mit $u_1, u_2 u_3$ geränderte Determinante der Coefficienten a, wenn wir für u_1, u_2, u_3 bezw. einsetzen: $(x_2 x_3' - x_3 x_2')$, $(x_3 x_1' - x_1 x_3')$, $(x_1 x_2' - x_2 x_1')$. Wir wollen nun mit $(xx')_k$ diejenige zweigliedrige Unterdeterminante der x bezeichnen,

die den Index k nicht enthält, also sei z. B.
$(x_2 x_3' - x_3 x_2') = (xx')_1$. Dann können wir setzen:

$$S_{xx'} = \Delta \cdot \sum_r a_{ik} (xx')_i \cdot (xx')_k \quad .$$

Setzen wir dies ein, so wird:

$$M(xx') = \frac{2k}{i} \text{ arc. sin } \frac{i\sqrt{\Delta} \cdot \sqrt{\sum a_{ik} (xx')_i (xx')_k}}{\sqrt{\sum a_{ik} x_i x_k \cdot \sum a_{ik} x_i' x_k'}} \quad .$$

In dieser so umgeformten Formel für M können wir nun leicht den Grenzübergang zum parabolischen Falle vornehmen. Wir werden die Bedingung einzuführen haben, daß $\Delta = 0$ wird; denn dies besagt ja, daß der Kegelschnitt in ein Punktepaar ausgeartet ist, setzen jedoch zunächst, wie es natürlich ist, Δ gleich einer unendlich kleinen Größe. Dann stimmt der arc. sin mit seinem Argumente selbst überein.

Wir erhalten daher:

$$M(xx') = \frac{2k}{i} \cdot i \frac{\sqrt{\Delta} \cdot \sqrt{\sum a_{ik} (xx')_i (xx')_k}}{\sqrt{\sum a_{ik} x_i x_k \cdot \sum a_{ik} x_i' x_k'}}$$

Nun wollen wir k in derselben Weise größer und größer werden lassen, als $\sqrt{\Delta}$ unendlich klein wird. Es möge also beim Grenzübergange $2k \cdot \sqrt{\Delta} = l$ werden, wo l eine beliebige, endliche Konstante ist, die der Willkür der zu wählenden Längeneinheit entspricht.

So erhalten wir:

$$M(xx') = l \cdot \frac{\sqrt{a_{ik}(x_0x')_i(xx')_k}}{\sqrt{\sum a_{ik} x_i x_k \cdot \sum a_{ik} x'_i x'_k}}$$

während der Ausdruck für den Winkel M, wie schon gesagt, nach wie vor ungeändert bleibt. Unser Resultat ist daher:

„Für die parabolische Maassbestimmung, bei welcher die Curve 2. Classe zu einem Punktepaar wird, bleibt die Formel für den Winkel M zweier Geraden ganz die alte, während die Formel für den Abstand M zweier Punkte bei ∞ werdendem k die zuletzt aufgestellte Gestalt annimmt."

Jetzt wird, wie wir sagten, unser Zielpunkt sein, nachzuweisen, dass, wenn wir insbesondere für $\Phi = 0$ die Kreispunkte wählen, die Formeln in die bekannten Formeln der gewöhnlichen Maassgeometrie übergehen. Die Kreispunkte seien gegeben durch die Gleichung:

$$\Phi = u_1^2 + u_2^2 = 0. \quad \text{Dann wird:}$$

$$M(uu') = \text{arc. cos.} \frac{u_1 u'_1 + u_2 u'_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{u_1'^2 + u_2'^2}};$$

Dies ist gewiss die gewöhnliche Formel für den Winkel

zweier geraden Linien.

Berechnen wir nun den Ausdruck F, so wird dies folgende Determinante sein:

$$F = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = -x_3^2,$$

d.h. gleich 0 gesetzt die Gleichung der doppelt zählenden unendlich fernen Geraden.

Dementsprechend erhalten wir folgenden Wert des Abstandes:

$$M(xx') = \frac{l\sqrt{(x_2x_3' - x_3x_2')^2 + (x_1x_3' - x_3x_1')^2}}{x_3x_3'}.$$

Auch dies ist die gewöhnliche Formel für die Entfernung zweier Punkte.

Setzen wir gar noch $\frac{x_1}{x_3} = x$, $\frac{x_2}{x_3} = y$, so ergiebt sich die gewöhnliche Formel der elementaren analytischen Geometrie: $M(xx') = l\sqrt{(y-y')^2 + (x-x')^2}$.

Wir haben daher, die parabolische Maassbestimmung abschließend, das Resultat:

„Die gewöhnliche Maassbestimmung in der Ebene ist uns ohne weiteres ein Beispiel dessen, was wir parabolische Maassbestimmung nennen. Die beiden Punkte, in welche sich bei der parabolischen Maass-

Bestimmung der fundamentale Kegelschnitt zerlegt hat, fallen bei ihr einfach in die beiden uns wohl bekannten Kreispunkte hinein."

So haben wir alles besprochen, was wir uns hinsichtlich der Cayley'schen Maassbestimmung vorgenommen haben. Wollen wir zur Unterscheidung der dreierlei in Betracht kommenden Maassgeometrieen noch ein bestimmtes Kennzeichen uns merken, so sei dies die Konstante k in der Definition von $M(xx') = k \log. D$. Wir können sagen, indem wir auf unsere Formeln zurückblicken:

Ist k. reell, so liegt die hyperbolische Maassbestimmung vor. Ist k imaginär, so liegt die elliptische Maassbestimmung vor. Ist k gleich unendlich, so liegt die parabolische Maassbestimmung vor.

Doch statt von k zu sprechen, führt man gemeinhin die Größe $-\frac{1}{4k^2}$ ein; warum, werden wir gleich sehen. Wir erkennen zunächst:

Ist $-\frac{1}{4k^2}$ negativ, so haben wir die hyperbolische Maassbestimmung. Ist $-\frac{1}{4k^2}$ positiv, die elliptische, Ist $-\frac{1}{4k^2} = 0$, die parabolische.

Was hat nun die Größe $-\frac{1}{4k^2}$ für eine Bedeutung?

Wir haben gesehen, daß wir die Maassbestimmung jedesmal durch die Geometrie auf einer Hülfskugel vom Radius $r = \frac{2k}{i}$ interpretieren können, im speciellen haben wir im elliptischen wie im hyperbolischen Falle diese Beziehung näher betrachtet, im parabolischen Falle ist sie selbstverständlich. Wenn man nun im vorliegenden Falle das Imaginäre und zugleich das Unendliche vermeiden will - und es giebt Leute, die eine gewisse Scheu vor dem Imaginären wie dem Unendlichen haben — so bedient man sich zur Bezeichnung der Kugel der Größe $\frac{1}{r^2}$, die das „Krümmungsmaass" der Kugel ausdrückt.
[Es entspricht dies ganz den gewöhnlichen Anschauungen, die man in der Flächentheorie vom Wesen der Krümmung hat.] Dies $\frac{1}{r^2}$ wird nun gleich $-\frac{1}{4k^2}$.
Wir werden daher, dies aufnehmend, auch sagen können:

„Die hyperbolische Maassbestimmung hat negatives Krümmungsmaass, die elliptische hat positives Krümmungsmaass, die parabolische hat verschwindendes Krümmungsmaass."

Dieser Satz besagt nicht mehr und nicht weniger als der vorhergehende, doch läßt er einem Mißver-

ständnisse freien Lauf. Die populäre Philosophie nämlich wirft, gelegentlich hier anknüpfend, den Mathematikern vor, daß sie der Ebene*) eine Krümmung beilegen wollten, ohne daß man doch sagen könne, nach welcher Seite denn eigentlich die Ebene krumm sei. Wir bemerken daher ausdrücklich: das Wort „Krümmungsmaaß" im hier vorliegenden Zusammenhang bezeichnet nur die Analogie, die man aus dem Umstande herninmt, daß man sich die Maaßverhältnisse der hyperbolischen und elliptischen ebenen Geometrie an den Verhältnissen einer gewöhnlichen Fläche, der Kugel, klar macht.

Nichteuklidische Geometrie im engeren Sinne.

Wir gehen nun über zu der Lehre von der nichteuklidischen Geometrie im engeren Sinne. Wir werden hier die philosophische Frage zu streifen haben, woher unsere Axiome stammen, und wie weit wir die euklidischen Axiome etwa durch andere ersetzen können. Dies ist die tiefere Bedeutung der nicht-euklidischen Geometrie. Vor allen Dingen

*) und weiterhin dem Raume.

aber wollen wir eine historische Entwicklung der nicht-euklidischen Geometrie geben.

Stellen wir zunächst einmal die philosophische Frage voran: Unsere bisherige Betrachtung operierte mit den gewöhnlichen mathematischen Begriffen und construierte von ihnen ausgehend eine allgemeine Art der Maassgeometrie. Hat dies nun etwa Bedeutung für die Grundlagen der Geometrie überhaupt, nämlich für den Aufbau der von uns thatsächlich betrachteten Maassgeometrie? Um diese Frage zu beantworten, wollen wir von der Thatsache ausgehen, die wir in den letzten Stunden öfter zu erwähnen Gelegenheit gehabt haben. Nehmen wir, noch auf dem Boden der euklidischen Geometrie stehend, $x\,y\,t$ als die homogenen rechtwinkligen Coordinaten. Es stellt dann: $x^2+y^2 \pm k^2 t^2 = 0$ einen nulliteiligen oder einteiligen Kreis dar, je nachdem wir das positive oder negative Vorzeichen wählen.

Wir wollen nun einmal die Voraussetzung machen, k^2 sei sehr groß, jedenfalls sehr groß gegenüber allen Entfernungen, mit denen wir in der Praxis zu thun haben. Um selbst den Astronomen mit ihren Sonnenweiten und Lichtjahren genug zu thun, sei etwa k bezw. $\frac{k}{i}$ (falls k imaginär sein sollte) durch eine 10 stellige Zahl in Lichtjahren ausgedrückt zu denken. Als specieller Fall sei auch $k=\infty$ berück-

sichtigt. Gründen wir dann auf diesen grossen Kreis unsere Maassbestimmung, die wir durch $M(xx) = k \log. D.$, und $M(uu') = \frac{i}{2} \log. \Delta$ einführen, — werden dann die 3 Fälle der elliptischen, hyperbolischen, und parabolischen Geometrie merklich verschiedene Resultate geben, die unserer Messung zugänglich sind? Es wird nicht schwer fallen, für $M(xx')$ resp. $M(uu')$ eine Reihenentwicklung nach fallenden Potenzen von k aufzustellen, wo die Glieder, die mit $\frac{1}{k}$ und höheren Potenzen von $\frac{1}{k}$ behaftet sind, bei den von uns angenommenen Werten von k und den relativ kleinen Entfernungen, die uns interessieren, doch sicherlich nicht ins Gewicht fallen, mag dies k reell oder imaginär sein.

Wir können jedenfalls daher sagen, (wie wir schon oben bei Gelegenheit bemerkten):

„Die dreierlei so hergestellten Maassbestimmungen unterscheiden sich in praktischer Hinsicht bei den Entfernungen, mit denen wir thatsächlich operieren, nicht merklich."

In theoretischer Hinsicht aber unterscheiden sie sich allerdings ganz wesentlich. Spielen wir einmal auf einen der Sätze über, die wir als Unterscheidungs-merkmal der 3 Fälle kennen. Wir wissen, in der hyperbolischen Geometrie giebt es zu einer gegebenen Geraden

durch einen Punkt ausserhalb zwei Parallelen, in der parabolischen nur eine, in der elliptischen endlich gar keine, da überhaupt im letzten Falle die Gerade eine endliche Länge hat, (freilich bei unserer Annahme betr. k sehr viel grösser als alle Längen, die wir je werden messen können, während in den beiden ersten Fällen die Gerade ∞ ist.)

"Auf die Frage nun, ob denn nicht nur mit unseren praktischen Operationen, sondern auch mit unserer Raumvorstellung, die sich doch immer nur auf einen kleinen Teil des Raumes bezieht, nicht ebensowohl die hyperbolische oder elliptische Maassbestimmung verträglich sei, wie die parabolische, da antwortet man im Anschlusse an Gauss, dass dies in der That der Fall ist: man wählt die parabolische nur als die einfachste der dreierlei mit unserer Raumvorstellung verträglichen Geometrieen."

Bemerken wir, dass man in der That bei keinerlei Messungen noch Veranlassung gehabt hat, einen Widerspruch mit der parabolischen Geometrie wahrzunehmen. Man kann diese Messungen dahin concentrieren, dass man die Winkelsumme im Dreieck untersucht, wo im hyperbolischen Falle die

Winkelsumme $< \pi$, im parabolischen $= \pi$, im elliptischen $> \pi$ ist. Man könnte also unternehmen, ein grosses Dreieck zu nehmen und zu sehen, wie sich die Winkelsumme daselbst verhält. Dies ist auch bereits von Gauss geschehen gelegentlich der hannoverschen Landesvermessung. Das Dreieck wurde in diesem Falle gebildet von den festen Triangulationspunkten auf dem Brocken, dem Inselsberg und Hohenhagen. Gauss bestimmte die Winkel unter Anwendung von Heliotropen. Wenn man auf die Unzulänglichkeit der Instrumente, auf die Refraktion der Lichtstrahlen durch die Luft etc. Rücksicht nimmt, so wird man verstehen, dass die Winkelsumme in einem solchen Dreiecke niemals genau 180° sein kann. Die Frage muss sein, ob sich eine constante Abweichung von 180° nach der einen oder anderen Seite ergeben hat, die ausserhalb der Grenzen der Beobachtung liegt.

Und dieses ist nun weder mit den Gaussischen Messungen noch mit irgend welchen neueren Messungen der Fall gewesen. Daher also ist es berechtigt, $k = \infty$ zu nehmen, (was die einfachste Hypothese ist), es ist aber nur bewiesen, dass k bezw. $\frac{k}{i}$ jenseits einer durch die Genauigkeit unserer Beobachtungen bedingten Grenze liegt.

Die Entwickelungen der letzten Stunde hatten den

Zweck vorläufig mit einer gewissen Überlegung bekannt zu machen. Den eigentlichen Gedanken der nichteuklidischen Geometrie haben wir damit nur erst gestreift. Wir legten ja auch noch die euklidische Geometrie unseren Beobachtungen zu Grunde. Wir nahmen ein rechtwinkliges Coordinatensystem, beschrieben den Kreis $x^2+y^2=4r^2=0$, nahmen diesen Kreis als sehr gross an und definierten dann in Bezug auf ihn die Maassbestimmungen, die sich von der gewöhnlichen Geometrie nun zwar unmerklich wenig unterscheiden, sofern wir nur die praktisch messbaren Entfernungen berücksichtigen, die dagegen ganz wesentlich, was die Theorie angeht, von ihr und unter einander verschieden sind. Offenbar kann es auf diesem Wege nie gelingen, der euklidischen Geometrie ein neues Fundament zu geben; wir würden uns nur im Cirkel bewegen. Wollen wir die Axiome und die Raumvorstellung der Euklidischen Geometrie zu prüfen im Stande sein, so müssen wir unsere Maassbestimmungen unabhängig von den speciellen Euklidischen Annahmen begründen. Dies aber gelingt folgendermaßen (wir geben den Verlauf des Gedankenganges nur erst in groben Zügen an):

Wir nehmen an, es sei gelungen, nach dem Vorbilde v. Staudt's die projective Geometrie aufzubauen, ohne

irgend von den Maassverhältnissen des Raumes zu sprechen. Wir wissen also zu reden von den Punkten und geraden Linien der Ebene und ihren Lagenverhältnissen zu einander, wir haben vor allem gelernt, die „Würfe" zu definieren vermittelst der Vierecks- und Vierseitskonstruktion und auf diese die Coordinatenbestimmung zu gründen. Doch fragen wir uns vorab noch, was wir von der gewöhnlichen Raumanschauung der projectiven Geometrie zu Grunde legten. Schon zu Anfang der Vorlesung haben wir auf den Unterschied der Raumanschauung hingewiesen, der sich darin ausspricht, ob wir mit dem Auge, mit dem Blick oder vermöge des Tastsinnes d.h. fühlend den Raum durchmessen. (Blickraum - Fühlraum). Gerade die ersten Eigenschaften des Raumes, die heute die Philosophie visuelle Eigenschaften im Gegensatze zu den mechanischen zu nennen pflegt, sind es, die bei der Begründung der projektiven Geometrie in Betracht kommen. Wenden wir dann im Besitz der projectiven Geometrie und von ihr ausgehend unsere Aufmerksamkeit den mechanischen Eigenschaften des Raumes zu, so wollen wir diese dahin zusammenfassen, dass man einen Körper von einem Ort zum anderen bewegen kann, ohne seine Grössenverhältnisse, seine Gestalt zu ändern.

Wir kommen so zu dem Begriff der Bewegung, und erkennen sofort, da bei den Bewegungen gerade Linien gerade Linien bleiben: Die Bewegungen des Raumes sind specielle Fälle der Collineation. Es wird dann nicht schwer sein zu zeigen, daß bei sämmtlichen Bewegungen einer Ebene in sich ein Kegelschnitt unverändert bleibt, je nachdem derselbe nulltheilig oder eintheilig ist oder in ein Punktepaar ausartet, werden wir den elliptischen, den hyperbolischen oder den parabolischen Fall zu unterscheiden haben. Dementsprechend werden wir in den Maassverhältnissen des Raumes nur einen besonderen Fall der Cayley'schen Maasbestimmung zu erblicken haben, wobei wir den thatsächlich vorliegenden Verhältnissen mit ausserordentlich grosser Genauigkeit ebensowohl durch die hyperbolische als die parabolische oder die elliptische Hypothese entsprechen können. Wir müssten eben absolut genau zu messen im Stande sein, wollten wir mit Bestimmtheit behaupten können, die parabolische und keine andere Maassbestimmung liegt in unserem Raum vor. —

Der hiermit geschilderte Aufbau der Geometrie ist es, den wir als Nicht-Euklidische Geometrie bezeichnen.

Nun wird ja ein Philosoph sehr viel zu sagen wissen, ob es richtig ist, in solcher Weise über die Geometrie zu reden. Er wird die Frage aufwerfen, ob wir überhaupt durch einen logischen Aufbau ein

System der Maassbestimmung zu begründen und dieses unter Heranziehung der Beobachtungen auf unseren Raum anzuwenden berechtigt sind, oder ob wir nicht vielmehr in uns ein geheimnisvolles Organ besäßen, das uns gestattet ohne Weiteres mit absoluter Genauigkeit über alle Grundlagen der Geometrie zu entscheiden. Doch wollen wir diese Frage hier zunächst bei Seite lassen, indem wir es vorziehen vorerst einen historischen Überblick über die Entwicklung der nicht-euklidischen Geometrie zu geben. Denn es ist klar, man kann erst dann ein Gebiet wissenschaftlichen Forschens von dem allgemein philosophischen Standpunkte aus zu beleuchten sich fähig halten, wenn man genau weiß, um was es sich handelt. Und hierzu ist am förderlichsten, daß man sich vertieft in den Gedankenkreis aller der Männer, die durch Schrift und Wort jenen wissenschaftlichen Zweig zu begründen und zu fördern bestrebt waren. Wie über die Fernwirkung der Kraft in der Physik philosophisch zu disputieren erst der sich berufen halten kann, der Physik kennt, so darf man auch in der Geometrie nicht eher philosophische Betrachtungen anstellen, so lange man nicht von dem Gesammtinhalte der Geometrie eine gewisse Kenntnis sich erworben hat. So wollen wir denn jetzt zu

einer Ausführung der historischen Entwicklung der nicht-euklidischen Geometrie uns hinwenden. Wir wollen zunächst folgende 3 Bemerkungen noch vorausschicken:

1./ „Nichteuklidisch" kann man eigentlich nur die Geometrie nennen, welche die parabolische Hypothese verwirft. Doch wir sagen ja gar nicht, die parabolische Hypothese ist falsch, sondern wir sagen, nur sie ist nicht notwendig. Daher ist der Ausdruck „nichteuklidisch" oder „antieuklidisch" nicht gut gewählt, besser ist das Wort „Pangeometrie," welches sich eben darauf bezieht, daß man alle 3 Hypothesen gleichberechtigt neben einander zuläßt und sich überlegt, zu welchen Resultaten jede einzelne führt. Die Bezeichnung „nichteuklidisch," die auf Gauss zurückgeht, ist von ihm auch nur in strengerem Sinne des Wortes gebraucht.

2./ Ferner haben wir hervorzuheben: diese Systematik, daß man die projective Geometrie an die Spitze stellt und von ihr aus die 3 Möglichkeiten der Maasbestimmung aufstellt, dieselbe ist durchaus modernen Ursprungs. In gegenwärtiger Vorlesung haben wir ja diese Systematik von vornherein in Aussicht genommen im Anschlusse an die Abhandlung: „über die sogenannte Nicht-euklidische Geometrie" in den mathem. Annalen vom Jahre 1871. Bd. 4. Doch in den Untersuchungen, über die wir jetzt zunächst zu berichten haben, ist von projektiver

Geometrie nicht die Rede. Vielmehr wird in ihnen ganz nach dem Muster der alten Euklidischen Darstellung gleich mit der neuen Maassgeometrie begonnen, indem man nur dadurch von Euklid abweicht, dass man die eine oder andere Annahme, Parallellinien betreffend, an die Spitze der Betrachtung stellt. Oder auch man beginnt mit analytischen Untersuchungen über denkbare Maassbestimmungen.

3.) Aber noch mehr als dies. In den Arbeiten der „ersten Periode" zu der wir uns sofort hinwenden, spricht man nur von der hyperbolischen und parabolischen Geometrie, nicht von der elliptischen. Der Grund ist einfach der: Man war zwar von Zweifel erfüllt an der Richtigkeit des Parallelenaxioms, aber man hielt an der Unendlichkeit der geraden Linie traditioneller Weise fest. Da nun in der elliptischen Geometrie die gerade Linie eine endliche Länge hat, so erklärt es sich, dass diese ausserhalb der Betrachtungen blieb. Erst der späteren Periode, die einen allgemeineren Standpunkt einnahm, (indem sie nicht nur das Parallelenaxiom in Zweifel zog,) war es vorbehalten, auch diesen Fall in gleicher Weise zu berücksichtigen. [Riemann].

Ziehen wir aus diesen Bemerkungen ein Facit, so dürfen wir sagen:

„In der älteren Periode bedeutet nichteuklidisch soviel wie hyperbolisch."

Wir kommen nun zur näheren Besprechung der ersten Periode:

I. Periode. Diese ist durch drei grosse Namen charakterisiert: Gauss, Lobatschefsky, Bolyai, denen ich hier gleich anreihen will: Beltrami der jedoch bereits einer späteren Zeit angehört. Lobatschefsky war ein Russe, Bolyai und zwar Wolfgang Bolyai und sein Sohn Johann sind Ungarn, genauer Siebenbürgen, Beltrami ist ein Italiener, so dass also bei unserem Berichte gleich anfangs der internationale Charakter unserer Wissenschaft hervortritt.

Gauss, dessen Namen wir an die Spitze stellen, hat selbst über seine Untersuchungen nur Andeutungen in Briefen gemacht, die später veröffentlicht sind. Was sich etwa in seinem Nachlass über diesen Gegenstand findet, ist bisher noch nicht publiciert. Wir entnehmen dem, was gedruckt vorliegt, das Folgende: Schon seit 1795 hat Gauss sich mit der Frage des Parallelenaxioms beschäftigt, und der Frage dabei gleich die charakteristische Wendung gegeben, dass er untersuchte, was geschieht, wenn das Parallelenaxiom als nichtgültig vorausgesetzt wird; er hat schon damals (als 18jähriger Jüngling) sich dementsprechend die Möglichkeit einer nichteuklidischen Geometrie zurechtgelegt. Aber es ist auch keinen Zweifel unterworfen, dass er durch seinen Einfluss die Untersuchungen von Lobatschefsky und Bolyai angeregt hat. Denn nicht

sua sponte sind die neuen Ideen in dem Geiste jener Männer entstanden, sondern wenn auch zum Teil indirekt durch den persönlichen Zusammenhang mit Gauss.

Wir müssen daher Gauss unbedingt als den Schöpfer der nicht-euklidischen Geometrie bezeichnen.

Was von den hierher gehörigen Andeutungen von Gauss uns vorliegt, ist folgendes: (wir citieren nach der Reihenfolge der Publikation):

1. Sartorius von Waltershausen, 1856: „Gauss zum Gedächtnis." (gleich nach dem Tode von Gauss veröffentlicht.)

Sartorius von Waltershausen war Prof. der Mineralogie an der hiesigen Universität und verkehrte persönlich im Gaussischen Hause. Er berichtet in der angeführten Schrift auf p. 81 von „Äusserungen, die Gauss über nicht-euklidische Geometrie gelegentlich gemacht hat.

2.) Briefwechsel mit Schumacher, der 1860 und in den folgenden Jahren herauskam. [Schumacher Astronom in Altona, ist der Begründer der Astron. Nachrichten.]. Es findet sich u.a. im Bd. 2 pag. 268 ein Brief vom 12. Juli 1831, worin Gauss seine Ansicht über die hyperbolische Geometrie ausführlich auseinandersetzt und unter anderem folgende 3 Sätze angiebt:

a.) Es giebt in der hyperbolischen Geometrie Dreiecke, deren Winkel beliebig klein sind.

Wir erkennen hierin ein Theorem wieder, welches wir seiner Zeit bereits betrachtet haben.

b) Es giebt in der nicht-euklidischen Geometrie keine Aehnlichkeit der Figuren, sondern nur Congruenz.

c.) Es wird ein Ausdruck für die Kreisperipherie vom Radius r für den Fall der nichteuklidischen Geometrie mitgeteilt. Derselbe lautet, wenn wir uns unserer bisherigen Bezeichnung bedienen:

$2\pi k\left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{2k}}\right)$, wo k die charakteristische Konstante der Maassbestimmung ist. Auch dies können wir mit Hülfe unserer Formeln leicht ausrechnen; es ergiebt sich sehr einfach, wenn wir uns erinnern, daß die hyperbolische Maassbestimmung der Ebene mit derjenigen einer Kugel vom Radius $\frac{2k}{i}$ übereinstimmt.

Weiter wäre zu erwähnen im Bd. V pag. 246/47 ein Brief vom 28. Nov. 1846, in welchem sich Gauss sehr beifällig über die Untersuchungen von Lobatscheffsky äussert.

3.) In der schon erwähnten Festrede von Schering zur Centenarfeier 1877 finden wir angegeben einen Brief an Bessel vom Jahre 1829 und vor allen Dingen einen Brief an Wolfgang Bolyai

vom Jahre 1799. Dies ist das interessanteste hierher gehörige Dokument, da es noch ganz aus Gauss' Jugendzeit stammt. In diesem letzteren Brief ist besonders gesagt, dass es in der hyperbolischen Geometrie ein Maximum des Dreieckinhaltes gebe. (vgl. pag. 395/96.).

Dies sind die sämmtlichen Notizen, die man in allgemeinen Kreisen über die Gauss'schen Untersuchungen, betreffend die nichteuklidische Geometrie besitzt. Gehen wir nun zu Lobatcheffsky und den beiden Bolyai über. Ersterer (geb. 22. Okt. 1793) war Professor in Kasan, während Wolfgang Bolyai (geb. 9. Februar 1775.) sowie sein Sohn Johann (geb. 15. November 1802) im ungarischen Orte Maros-Vásárhely lebten. Uns interessieren besonders die persönlichen Beziehungen der beiden Forscher Lobatcheffsky und Wolfgang Bolyai zu Gauss. Wolfgang Bolyai war, wie wir schon sagten, Universitätsfreund von Gauss; Gauss selbst hielt sehr viel von ihm, er sagt von ihm, dass er der einzige gewesen sei, der seine metaphysisch-mathematischen Fragen ganz zu verstehen vermocht hätte. (vgl. Sartorius v. Waltershausen, pag. 17.). Über Lobatcheffsky erfahren wir näheres aus der Biographie, welche seinen von der Universität Kasan herausgegebenen

Werken vorangestellt ist. Es zeigt sich, daß Lobatscheffsky ein Schüler von Bartels gewesen ist, der eine Zeit lang Professor in Kasan war und vorher mit Gauss in dessen Braunschweiger Zeit in engem mathematischen Verkehr gestanden hat. Von Bartels wurde Lobatscheffsky ganz ausführlich mit den Gaussischen Schriften bekannt gemacht, und es kann kaum bezweifelt werden, daß er von diesem auch eingeweiht wurde in die Frage = stellung der Nicht = Euklidischen Geometrie (wegen Bartels vergl. S. v. Waltershausen pag. 13). Wenn sonach auch kein Zweifel bestehen kann, daß Lobatscheffsky sowohl wie Bolyai die Fragestellung ihrer Untersuchungen der Gaussischen Anregung verdanken, so muß man anderer = seits es durchaus anerkennen, daß die von ihnen gegebe = nen Ausführungen des Grundgedankens, die etwa seit dem Jahre 1830 erschienen, beiden eigenthümlich angehörten und vollauf selbstständige Arbeiten sind.

Betrachten wir jetzt näher die Schriften von Lobatscheffsky, die hier in Betracht kommen. Es sind dies zunächst eine Reihe von Abhandlungen in russischer Sprache aus den Jahren 1829 und 1830 in den Schriften der Universität Kasan. Dann folgt 1837 ein Aufsatz in Crelle's Journal Bd. 17 unter dem Titel: „Geometrie imaginaire." darauf erschien 1840 in Berlin ein kleines deutsches Schriftchen, ziemlich unansehnlich: „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien."

Endlich hat Lobatcheffsky 1855 noch eine zusammenfassende, systematisch aufgebaute Bearbeitung seiner Untersuchungen veröffentlicht, gleichzeitig in russischer und französischer Sprache; dies ist die „Pangéometrie".

Alle diese Schriften sind jetzt in seinen gesammelten Werken, die 1883 und 1886 in Kasan in 2 Bänden erschienen sind, zugänglich; der 2te Band enthält die deutschen und französischen Publikationen.

Wir gehen über zu den Schriften der beiden Bolyai. Es ist hier besonders zu erwähnen die Schrift: W. Bolyai „Tentamen juventutem studiosam in elementa Matheseos purae introducendi etc." Diese Arbeit erschien in 2 Bänden in den Jahren 1832-33. Sie giebt eine allgemeine Einleitung in das Studium der Mathematik in lateinischer Sprache. Diesem Werk ist nun als Anhang die Schrift des jüngeren Bolyai beigefügt:

J. Bolyai, „Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens etc." Leider sind diese Werke im Buchhandel sehr selten geworden.*) dieselben sind von vorneherein nicht auf grosse Verbreitung berechnet gewesen, indem sie z.B. ohne Angabe ihres Verfassers erschienen sind. Wir müssen daher verweisen auf eine deutsche Bearbeitung des letzten Werkes:

Frischauf, „absolute Geometrie nach Johann Bolyai," welche zuerst 1872 in Leipzig erschien. Frischauf (Prof. in Graz) hat im Jahre 1876 noch eine Schrift unter

*) Dasselbe gilt von der 1837 erschienenen deutschen Schrift: „Kurzer Grundriss eines Versuches etc." (Auszug aus dem Tentamen)

dem Titel „ die Elemente der absoluten Geometrie “ herausgegeben, die jedoch weniger zu empfehlen ist. Der Verfasser hat sich hier nämlich auch über neuere Untersuchungen verbreitet, deren Wiedergabe nicht correct sein dürfte.

Wenn wir einen Blick hineinwerfen, sei es in die Schriften von Lobatscheffsky oder in die der Bolyai, so werden wir, wie es immer geht, wenn man Abhandlungen eines uns seither fremden mathemat. Schriftstellers zu lesen versucht, bald gewisse uns nicht sofort verständliche Abkürzungen und Bezeichnungen entdecken. Bei Lobatscheffsky sei besonders erwähnt das Zeichen $\Pi(p)$, bei Bolyai z. B. Oy. Wir wollen, um das Verständnis zu erleichtern, die beiden Zeichen erklären. $\Pi(p)$ soll heißen „ Parallelwinkel.“ Es ist dies so zu

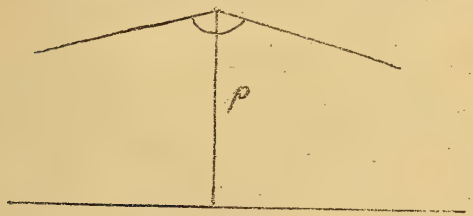


Fig. 42.

verstehen: Wenn man auf einer geraden Linie eine Senkrechte von der Länge p errichtet und von dem Endpunkte derselben aus die Parallelen (im hyperbolischen Sinne) zu der ersten Geraden zieht, so werden wir „ Parallelwinkel oder Winkel des Parallelismus “ die beiden Winkel nennen, welche die Parallelen mit der Senkrechten p bilden. Das Bolyaische Zeichen ist seiner Bedeutung nach ganz einfach; Oy soll nämlich

bezeichnen die Peripherie eines Kreises vom Radius y. – Im übrigen stimmen beide Autoren darin überein, daß sie in streng synthetischer Weise, nach dem Vorbilde Euklids, das System der hyperbolischen Geometrie aufbauten, und es ist wunderbar, wie diese Forscher, ohne irgend wie ein Abbild der neuen Anschauungsweisen zu haben, (wie uns dasselbe vorliegt, indem wir irgend einen reellen Kegelschnitt zeichnen), doch zum klaren Ende gekommen sind.

Wir wollen diesem Bericht über Gauss, Lobatcheffsky und Bolyai, wie wir schon in Aussicht stellten, gleich einige Worte über eine Schrift des Italieners Beltrami hinzufügen. Der Titel derselben ist:

„Saggio di Interpretazione della Geometria non-Euclidea."

(Versuch einer Interpretation der nicht-euklid. Geometrie).

Sie ist erschienen in der neapolitanischen Zeitschrift: Giornale di Matematiche 1868. Bd. VI.

Ehe wir jedoch von der Interpretation, die Beltrami für die Formeln der nicht-euklidischen Geometrie aufgestellt hat, berichten können, müssen wir uns in einem kleinen Excurs mit einigen Betrachtungen der allgemeinen Flächentheorie befreunden.

Die moderne Theorie der krummen Flächen geht, (wenn wir nicht auf Euler zurückgreifen wollen), auf Monge zurück, dessen Schule um 1800 in Paris

blühte. Sein Hauptwerk führt den Titel: „Application de l'Analyse à la Géometrie," es ist zuerst unter diesem Titel 1807 erschienen. In dieser Schrift wird vor allem die Frage nach der Abwickelbarkeit einer Fläche auf die Ebene behandelt. [„Developpable Flächen."] So kann etwa, um an die einfachsten Beispiele abwickelbarer Flächen zu erinnern, ein beliebiger Kegel, ein Cylinder und eine Ebene abgerollt werden. „Wenn wir dementsprechend auf einer „developpablen Fläche" irgend ein Flächenstück besonders auszeichnen, vielleicht auf ihm eine Figur entwerfen, so kann dieses Flächenstück genau mit einem Stück der Ebene zur Deckung gebracht werden, wobei dann die gezeichnete Figur mit einer ihr kongruenten der Ebene zusammenfällt. Umgekehrt kann man auch jede Figur der Ebene auf die vorliegende abwickelbare Fläche übertragen.

„Wenn daher eine Fläche auf eine Ebene abgewickelt werden kann, (natürlich ist hier nur von der gewöhnlichen euklidischen Ebene die Rede), so gilt auf der Fläche die Euklidische Geometrie, wie in der Ebene, nur daß statt von geraden Linien von kürzesten Linien, „geodätischen Linien," als welche die ersteren sich übertragen, gesprochen werden muß."

Dieser Satz bedarf jedoch noch einer Einschränkung, wir haben bereits früher betrachtet, daß z. B. ein Rotationscylinder nicht einmal, sondern beliebig oft auf eine Ebene abgewickelt werden kann, ehe die ganze Ebene überdeckt ist. Wir können uns etwa die Ebene in einzelne Streifen zerfallen denken, deren jeder bereits dem ganzen Cylinder entspricht.

„Vollständig ist daher die in dem letzten Satze ausgesprochene Übereinstimmung nur, wenn wir kleinere einfach zusammenhängende Stücke der Fläche, bezw. der Ebene in Betracht ziehen, darüber hinaus können Unterschiede im Zusammenhange der Flächen auftreten."

(nämlich daß der Rotationscylinder in sich zurückläuft, was die Ebene nicht thut, etc.—)

Jetzt liegt es nun außerordentlich nahe, nicht zu fragen, wann ist eine Fläche auf eine Ebene abwickelbar, sondern wann sind allgemein zwei Flächen auf einander abwickelbar. Offenbar müssen im Falle der Abwickelbarkeit zweier Flächen auf einander die Entfernungen je zweier entsprechender Punkte sowie die Winkel, unter denen correspondierende Curven sich schneiden, gleich sein. Man wird leicht für diese notwendige und hinreichende Bedingung den analytischen

Ausdruck finden, wenn man zum Bogenelement übergeht. Denn der Bedingung wird, weil bei unendlich kleinen Dreiecken die Winkel durch die Seiten ohne weiteres bestimmt sind, dann und nur dann genügt werden, wenn die Längen entsprechender Linienelemente beider Flächen gleich sind. Nehmen wir nun auf der einen Fläche irgend welche krummlinige Coordinaten u, v an, so wird sich daselbst $(ds)^2$ darstellen, wie wir bereits früher sahen, als:
$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, wo E, F, G gewisse Funktionen von u und v sind. Führen wir analog auf der anderen Fläche die krummlinigen Coordinaten u', v' ein, so wird entsprechend
$ds'^2 = E'du'^2 + 2F'du'dv' + G'dv'^2$ werden.

Nun ist die Frage: Wenn wir die Coordinaten u und v als Funktionen von u', v' denken, etwa $u = \varphi(u', v')$, $v = \psi(u', v')$, wird es uns dann gelingen, diese Funktionen so zu bestimmen, daß mit ihrer Hülfe der eine Differentialausdruck in den anderen übergeführt werden kann? Ist dies der Fall, so werden wir in der Gleichheit des Ausdruckes für das Quadrat der Länge des Linienelementes einen Beweis für die Abwickelbarkeit beider Flächen aufeinander erbracht haben. Ist es nicht der Fall, so ist die Abwickelung unmöglich.

Wir werden daher allgemein zwei Flächen auf

einander abwickelbar nennen, wenn es gelingt, den Ausdruck für ds^2 auf der einen Fläche durch Einführung geeigneter Variablen in den Ausdruck für ds^2 auf der anderen Fläche zu transformieren."

Das Problem der Abwickelbarkeit zweier Flächen auf einander hat in dieser Weise Gauss in seiner berühmten Abhandlung vom Jahre 1827 studiert. Es ist dies der im VI Bde der Göttinger Abhandlungen erschienene Aufsatz: „Disquisitiones generales circa superficies curvas."

In dieser Arbeit hat Gauss einen wunderbaren Satz aufgestellt, wunderbar zugleich wegen seiner Einfachheit und seiner Wichtigkeit. Um ihn verstehen zu können, müssen wir uns vorerst mit dem Begriff des „Krümmungsmasses" vertraut machen. Wenn man einen bestimmten Punkt einer krummen Fläche ins Auge fasst, so werden wir zwei Tangentenrichtungen auf der Fläche angeben können, in denen die Krümmung der Fläche ein Maximum und ein Minimum wird. Die so definierten Krümmungsradien R_1 und R_2 nennt man die „Euler'schen Krümmungsradien" und den reziproken Wert ihres Produktes $\frac{1}{R_1 R_2}$ bezeichnet man eben nach dem Vorgange von Gauss als das Krümmungsmass der Fläche in jenem bestimmten Punkte. Es entspricht dies durchaus dem, dass wir schon oben $\frac{1}{R^2}$ als Krümmungsmass einer Kugel vom Radius R bezeichneten.

Denken wir uns nun einmal, (um zu dem Gaussischen Satze überzuleiten) als Beispiel einer Fläche die Äquatorzone *) einer Kugel. Als Hauptkrümmungsradien wählen wir hier diejenigen, die sich auf die Fortschreitungsrichtungen der Meridiane und Breitenkreise beziehen. Wenn wir nun diese Zone aufgeschnitten denken längs des Bogens eines Meridians, so werden wir leicht im Stande sein, die Kugelzone, ohne ihren Charakter als Rotationsfläche zu ändern, bis zu einer gewissen Grenze auseinanderzubiegen, wir bemerken dann, daß der Krümmungsradius der Breitenkreise sich vergrößert, dagegen der Krümmungsradius der Meridiancurven kleiner wird. Das Umgekehrte findet natürlich statt, wenn wir die Kugelzone in sich selbst aufrollen, was in beliebigem Maasse geschehen kann. Dieses Beispiel der Biegung einer Fläche wird uns den angekündigten Gaussischen Satz illustrieren, der die Verhältnisse in exakter Form allgemein ausspricht:

„Wenn man eine Fläche beliebig deformiert, ohne ihr Bogenelement zu strecken, so bleibt dabei an jeder einzelnen Stelle das Krümmungsmaass konstant."

Fig. 43.)

a)

b)

c)

*) Wir wählen der Einfachheit es aus drücks wegen die Bezeichnung der mathem. Geographie.

Aus letzterem Satze können wir sofort eine notwendige, wenn auch nicht hinreichende Bedingung für die Abwickelbarkeit zweier Flächen aufeinander herleiten:

„Damit 2 Flächen auf einander abwickelbar sind, müssen sie an denselben Stellen je dasselbe Krümmungsmaass darbieten."

Soll daher z.B. eine Fläche auf eine Kugel vom Radius a abwickelbar sein, so muss sie überall das gleichförmige Krümmungsmaass $\frac{1}{a^2}$ besitzen. Doch es sagt der Gaussische Satz noch nicht, dass uns umgekehrt jede Fläche, welche die Eigenschaft hat, konstantes Krümmungsmaass $\frac{1}{a^2}$ zu besitzen, wirklich nun ein Bild der Kugel vom Radius a darstellt. Es war daher die Aufgabe der Weiterentwickelung dieser Theorie, hierüber Klarheit zu schaffen. Dies ist von Minding in Dorpat geschehen in den bezüglichen Abhandlungen in Crelle's Journal Bd 19 u. 20 von den Jahren 1839, 1840. Minding hat dort zum ersten Male die allgemeinen Flächen konstanten Krümmungsmaasses betrachtet, d.h. Flächen, die in ihren sämmtlichen Punkten dasselbe Krümmungsmaass besitzen. Und in der That beweist er den Satz:

„Wenn eine Fläche überall das konstante Krümmungsmaass $\frac{1}{a^2}$ hat, so kann sie durchweg auf die Kugel vom Radius a abgewickelt werden."

Im besondere bestimmt dann aber Minding

Rotationsflächen dieser Eigenschaft. Wählen wir die Axe der Rotationsfläche als z-Axe und bezeichnen den senkrechten Abstand eines Punktes der Fläche von der Axe mit r, so ergiebt sich die Gl. der möglichen Meridiankurven in der Gestalt:

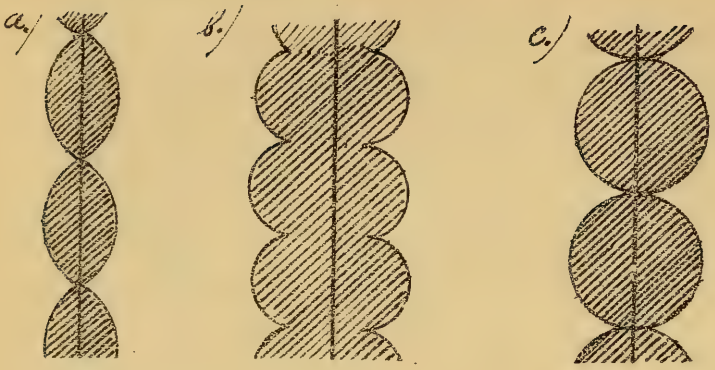
$$z = \int dr \sqrt{\frac{a^2(1-b^2)+r^2}{a^2b^2-r^2}}$$

, wo b eine willkürliche Constante bezeichnet. *)

Je nach der Wahl der Constante b in der letzten Formel haben wir 3 verschiedene Formen der Meridian-kurven und damit der Rotationsflächen konstanten positiven Krümmungsmaasses zu unterscheiden. Dieselben seien dargestellt in Fig. 44, a, b, c. Die erste Form zeigt uns eine Rotationsfläche, die aus an einander gereihten spindelförmigen Theilen besteht, die Meridian-kurve hat eine ähnliche Gestalt wie eine doppelte Sinus-linie. Die zweite Gattung der Flächen besteht aus übercin-ander gelagerten Wülsten, die in Rückkehrkanten zu-sammenstoßen. Den Übergangsfall zwischen diesen beiden Fällen bilden an einander gereihte Kugeln selber, die Meri-diankurve dieser dritten Art zeigt Kinder Kettkreise.

*) [NB. vergl. auch die Noten, welche Liouville der von ihm veranstalteten Ausgabe von Monge's Applications (1850) zugefügt hat. (insbesondere pag. 583 ff. p. 599 ff.; es werden dort die Minding'schen Resultate aufs Neue abgeleitet.]

Fig. 44.



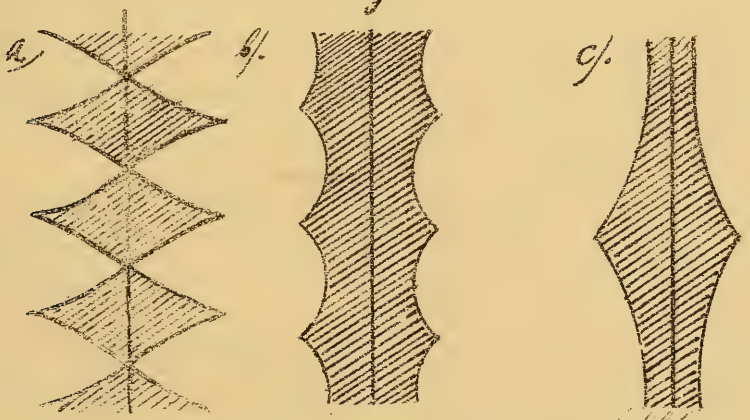
Man erhält die Rotations-Flächen natürlich sehr einfach wenn man diese Curven um ihre Axe rotieren läßt.

Das Interesse, welches diese Rotationsflächen vermöge ihrer Eigenschaft, auf der Kugel abwickelbar zu sein, erwecken, möge aus folgendem Satze erhellen:

" Auf den so gewonnenen Flächen konstanter positiver Krümmung gilt dann kurzweg die sphärische Geometrie, indem man die größten Kreise der Kugel durch die geodätischen Linien der Oberfläche ersetzt denkt. Vorausgesetzt wird dabei natürlich, daß man nur kleinere einfach zusammenhängende Stücke der beiden Flächen mit einander vergleicht, indem nämlich sonst andersartige Zusammenhangsverhältnisse der Flächen in Betracht zu ziehen sind, auch ev. die Rückkehrkurven einen weiteren Verfolg der geodätischen Linien einfach abschneiden."

Minding hat des ferneren nun auch Rotations-
flächen konstanten negativen Krümmungsmaasses
betrachtet, es ist nicht schwer, auch solche Flächen sich
vorzustellen. Wir wollen gleich die 3 hierin Betracht
kommenden Typen anführen, sie seien durch ihre
Meridiankurven in der Fig. 45 a, b, c dargestellt. Die
erste Art der Flächen besteht wieder aus einer Reihe
gekrümmter Segmente, die nur in einem Randpunkte
zusammenhängen, jedes dieser Segmente besitzt ausserdem
in der Mitte eine Rückkehrkante. Die zweite Art der Flächen
besitzt

Fig. 45.



etwa die Gestalt von auf einander gestellten Zwischen-
ringen, je zwei auf einander folgende Glieder gehen
vermittelst einer Rückkehrkante in einander über. Die
dritte Art, welche die Übergangsform der beiden ersten
darstellt, besteht nur aus einem einzelnen Abschnitte

der wieder eine Rückkehrkante besitzt und deren beide Theile ins Unendliche sich erstrecken, indem sie sich der Axe asymptotisch nähern. Auf die weiteren Eigenschaften dieser Fläche werden wir in der nächsten Stunde näher eingehen.

Um die 3 Arten der Rotationsflächen konstanter negativer Krümmung leichter bezeichnen zu können, wollen wir das Ferneren die Gestalt a den konischen Typus, die Gestalt b. den ringförmigen Typus, die Gestalt c. den aperiodischen Typus nennen. Was nun die analytische Formel für diese Flächen angeht, so erhalten wir dieselbe aus jener auf pag. 186 aufgestellten Formel für die Rotationsflächen konstanten positiven Krümmungsmaasses ganz einfach, indem wir das dort auftretende a^2 in $-a^2$ verwandeln. Es ist daher durch

$$z = \int dr \sqrt{\frac{a^2(1-b^2) - r^2}{a^2 b^2 + r^2}}$$

die allgemeinste Gestalt der Meridiankurven unserer Fläche gegeben. Setzen wir in dieser Formel $b^2 < 0$, so erhalten wir speciell die Flächen des konischen Typus, setzen wir $b^2 > 0$, die des ringförmigen Typus, setzen wir $b^2 = 0$, den aperiodischen Typus. Im Letzteren Falle können wir das Integral leicht auswerten. Dasselbe geht für $b^2 = 0$ über in $z = \int dr \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r}$, und wenn wir substituieren $r = a \cdot \sin \varphi$, so bekommen wir, wie man sich leicht

übergeht: $z = a\left(\log. tg. \frac{\varphi}{2} + \cos. \varphi\right)$. (Es ist die Integrationskonstante = 0 gesetzt, da für $r = a$, $z = 0$ angenommen ist.)

Wer mit der Geschichte der älteren Mathematiker bekannt ist, dem wird diese Gleichung bereits unter dem Namen der „Tractrix" entgegengetreten sein. Unter der „Tractrix" versteht man gemäß der von jenen Mathematikern aufgestellten Definition eine Curve, welche die Eigenschaft hat, daß die Abschnitte ihrer Tangenten zwischen den Berührungspunkten und einer festen Geraden konstante Länge haben.

Fig. 46.

Diese Curve giebt uns zugleich ein Beispiel, wie die älteren Mathematiker gern an Vorkommnisse des gewöhnlichen Lebens ihre Betrachtungen anzuknüpfen pflegten. Der Name „Tractrix" rührt nämlich daher, daß ein Hund, der etwa an einer Kette befestigt ist, eine solche Curve durchläuft, wenn das andere Ende der stets gespannten Kette vielleicht mittelst eines Ringes an einer Stange hingleiten gezwungen ist.

Wir können zusammenfassend sagen:

„Die Meridiancurve der abwickelbaren Fläche konstanter negativer Krümmung ist einfach eine Tractrix."

Minding hat nun im Jahre 1839 nicht nur diese

Flächen konstanter negativer Krümmung bestimmt, sondern auch eine Bemerkung hinzugefügt, die uns nicht überraschen wird. Wenn wir die Geometrie auf diesen Flächen studieren, wenn wir im speciellen Dreiecke betrachten, die von geodätischen Linien gebildet werden, so sind, wie Minding gezeigt hat, die Formeln, welche den Zusammenhang der Winkel und Seiten solcher Dreiecke geben, leicht zu erhalten, indem man in die gewöhnlichen Formeln der sphärischen Trigonometrie den Radius $i.a$ statt a einführt.

Wenn nun Minding im Bd. 19 des Crelle'schen Journals diese Bemerkung macht, und andererseits Lobatcheffsky seine Untersuchungen über die „Géometrie imaginaire" im Bd. 17 veröffentlicht, so sollte man meinen, daß es doch gar nicht lange hätte dauern können, bis der Zusammenhang der von beiden Forschern auf verschiedenem Wege gefundenen Resultate klar gestellt würde. Um so wunderbarer ist es, daß diese Abhandlungen sehr lange Zeit neben einander bestanden haben, ohne zu einander in Beziehung gesetzt zu sein. Erst Beltrami war es vorbehalten, im Jahre 1868 die Resultate von Minding und Lobatcheffsky mit einander zu verknüpfen. *)

---

*) Riemann hat freilich schon 1854 die Beziehung sehr wohl gekannt, vergl. weiter unten seine „Hypothesen". Vielleicht darf man annehmen, daß Gauss selbst die

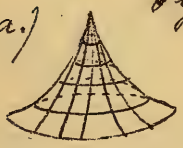
Denn:

„ das Verdienst des Beltramischen Saggio ist es, nachdrücklich darauf aufmerksam gemacht zu haben, dass die Geometrie auf den Flächen constanter negativer Krümmung sich geradezu mit der nichteuklidischen, d.h. hyperbolischen Geometrie deckt." Wir müssen jedoch noch hinzufügen: „ Abgesehen natürlich von den besonderen Zusammenhangs- und Begrenzungsverhältnissen, die bei solchen Flächen durch ihren Charakter als Rotationsflächen oder durch das Auftreten von Rückkehrkurven herbeigeführt sein können."

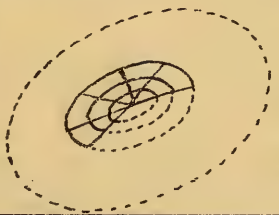
Um diese Verhältnisse recht klar zu machen, ist es am zweckmäßigsten, dass wir uns geradezu in der Cayley'schen Ebene der hyperbolischen Maassbestimmung ein Abbild der betrachteten Flächen aufsuchen. Wir wollen beginnen mit dem konischen Typus unserer Flächen und ein Stück derselben ins Auge fassen, das von einer Rückkehrcurve sich nach einem Knotenpunkte hinzieht.

Fig. 47

a)



b)



Die Bacikenkreise werden sich dann offenbar in der

betr. Beziehung von vornherein im Auge hatte, als er 1827 seinen Satz vom Krümmungsmaasse aussprach. Aber Beltrami ist der Erste, der die Sache zur öffentlichen Discussion brachte.

hyperbolischen Ebene als concentrische Kreise erster Art darstellen müssen, da alle ihre Punkte jedesmal von einem erreichbaren Punkte, nämlich dem Knotenpunkte der Fläche, gleich weit entfernt sind, die Meridiane dagegen werden als orthogonale Trajectorien der Breitenkreise in die geradlinigen Strahlen übergehen, die vom Mittelpunkte der Kreise in der hyperbolischen Ebene ausgehen, in der That laufen die Meridiane ja auch alle in dem Knotenpunkte zusammen. Damit der besondere Zusammenhang, den die Fläche a) als Rotationsfläche bedingt, aufgehoben wird, denken wir uns dieselbe längs eines Halbmeridians aufgeschnitten. Die Darstellung in der Cayley'schen Ebene wird dann der Art sein, daß das Bild der zerschnittenen Fläche ein Ausschnitt aus einem Kreise erster Art, nämlich aus einem Kreise mit wirklichem Mittelpunkt ist. Es kann nun nicht schwer werden, nachdem das System der Breitenkreise und Meridiane übertragen ist, jede Figur auf der Fläche a) durch die entsprechende Figur in der hyperbolischen Ebene abzubilden, oder umgekehrt jede Figur der letzteren auf die erstere zu übertragen.

Analog verfahren wir bei der Abbildung der ringförmigen Flächen, auch hier werden wir nur das einzelne Stück betrachten, das jetzt von zwei Rückkehrkurven begrenzt ist. Nehmen wir darauf

Rücksicht, daß die Meridiane in diesem Falle nicht in einem Punkte zusammenlaufen, wohl aber die Breitenkreise rechtwinklig schneiden, so können wir sofort sagen:

„Die Meridiane verwandeln sich in der Cayley'schen Ebene in Stücke von geraden Linien, die in einem idealen Centrum zusammenlaufen, die Breitenkreise geben Stücke zugehöriger concentrischer Kreise dritter Art, insbesondere der Kehlkreis, d.h. der Kreis kleinster Ausdehnung, giebt ein Stück der die Figur durchziehenden Berührungssehne."

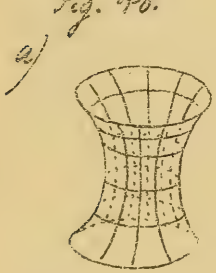
Wir müssen jedoch noch ein Wort über die Begrenzung des Bildes hinzufügen. Um den Zusammenhang der Rotationsfläche aufzuheben, denken wir uns den Ring wieder längs eines Meridians aufgeschnitten, die so entstehenden Ränder entsprechen den Stücken beider Randcurven des Bereiches in der hyperbolischen Ebene, während die Rückkehrkanten der Fig. a.) durch Stücke des correspondierenden Kreises um O dargestellt werden. Wir haben dieselben in der Figur stärker ausgezogen v. Fig. 46.

Was wird nun aus den Flächen vom asperiodischen Typus bei ihrer Abbildung auf die Cayley'sche Ebene?

Wir denken diese Fläche wieder längs eines Meridians aufgeschnitten und dann aus einander gefaltet.

Wir erkennen leicht, die Meridiankreise werden gerade Linien werden, die in einem unendlich fernen Punkt O zusammenlaufen, die Breitenkreise dagegen werden als orthogonale Trajektorien der Meridiane den Horocyclen um O als Mittelpunkt entsprechen:

Fig. 48.



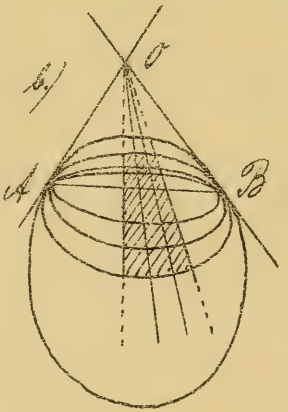
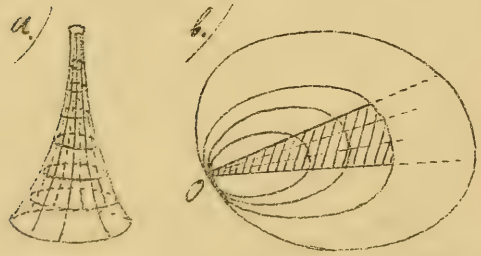


Fig. 49.

Es wird dann ein Kreisausschnitt, wie Fig. 49. zeigt, sein, der bei der Abbildung der Fläche vom aperiodischen Typus entsteht.

Hiernach repräsentiert also jede einzelne geschlossene Rotationsfläche konstanter negativer Krümmung nur einen kleinen Theil der Cayley'schen Ebene, indem die konische Fläche einem



Kreisausschnitts erster Art, die ringförmige einem solchen dritter Art, die aperiodische einem solchen zweiter Art entspricht. Besser kann man die Abbildung jedoch vornehmen, indem man nicht die Rotationsfläche längs eines Meridians aufgeschnitten denkt, sondern indem man sie einfach auf die

hyperbolische Ebene abwickelt, sooft, bis der ganze Kreis bedeckt ist. Wir können uns etwa die Fläche wiederholt mit einem Papierstreifen umwickelt denken, der dann abgerollt wird. Im Falle des conischen Typus entsteht dabei vorkommenden Falles eine mehrfache Bedeckung der in der Cayley'schen Ebene gelegenen Kreisfläche, wir wollen darum vom conischen Typus hier nicht weiter reden. Im Falle des ringförmigen und aperiodischen Typus haben wir die Rotationsfläche unendlich oft abzuwickeln, ehe die ganze Kreisfläche bedeckt ist. Von einer mehrfachen Bedeckung der letzteren ist keine Rede. Auf dem Papierstreifen, mit dem wir uns unsere Flächenmodelle unendlich oft umwickelt denken, findet dann das ganze Innere eines Kreises erster, zweiter oder dritter Art seine Abbildung. Man kann diese Art der Abwickelung zweckmäßig vergleichen mit der eines Rotationscylinders auf der gewöhnlichen Ebene, ein Beispiel, dessen wir uns bereits öfter bedient haben. (v. Fig. 50 und 51.)

Fig. 50.

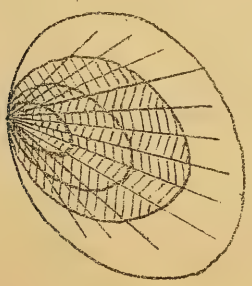
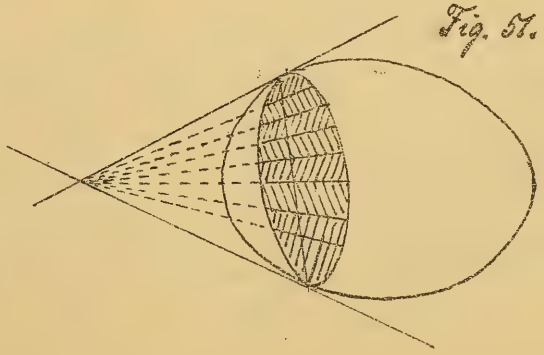


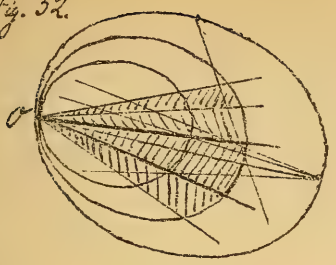
Fig. 51.



Es handelt sich nun insbesondere darum, irgend welche Figuren, die auf den Flächen gegeben sind, auf die Cayley'sche Ebene zu übertragen, und umgekehrt. Wir können uns in diese Verhältnisse leicht genauer hineindenken, wenn wir auf den Rotationsflächen die geodätischen Linien betrachten. Dieselben müssen sich bei der Abwickelung aus den geraden Linien der Cayley'schen Ebene ergeben. Ziehen wir z. B. im Falle der aperiodischen Fläche (Fig. 52.) eine gerade Linie, die von einem Punkte des in Fig. gezeichneten begrenzenden Horocyclus zu einem anderen geht und dabei eine beliebige Anzahl der auf einander folgenden Kreissektoren schneiden möge. Entsprechend wird die correspondierende geodätische Linie auf der Fläche von einem Punkte der Rückkehrkante ausgehend die Fläche einmal, zweimal, dreimal u. s. w. umwinden, je nachdem die gerade Linie einen, zwei, drei u. s. w. Sektoren durchschneidet. Sie wird dabei einen höchsten Punkt erreichen, der dem Berührungspunkte der Geraden in der Ebene mit einem leicht construierbaren Horocyclus entspricht, und wird schließlich in einem zweiten Punkte der Rückkehrkurve enden. Der aufsteigende und der absteigende Teil der geodätischen Linie liegen zueinander symmetrisch in Bezug auf einen Meridianschnitt.

Wenn wir einmal einen einzelnen Meridian in der hyperbolischen Ebene ins Auge fassen, so sehen wir,

Fig. 52.



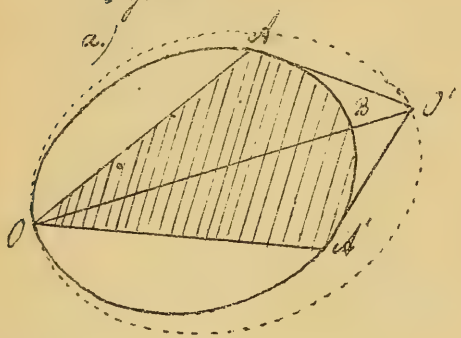
dass ausser der Gesammtheit der übrigen Meridiane, die alle zu ihm parallel sind, noch eine zweite Schaar von geraden Linien existiert, die gleichfalls dem bevorzugten Meridian parallel ist; es sind dies die geraden Linien, welche durch den zweiten Schnittpunkt des Meridians mit dem Kegelschnitt gehen. (Wir können diese zweite Schaar etwa „antiparallele Gerade" nennen). Es ist nun eine gute Uebung, sich in den Verlauf der diesen antiparallelen Geraden entsprechenden geodätischen Linien auf der Fläche hineinzudenken.

Es sei z. B. in Fig. 53a der schraffierte Theil der Cayley'schen Ebene die Abbildung einer gegebenen aperiodischen Rotationsfläche, in dieser sei ein Meridian ausgezeichnet. Wir wollen die zu ihm „antiparallelen Linien" betrachten und auf die Fläche als geodätische Linien übertragen, indem wir ausgehen von den Tangenten an den begrenzenden Horocyclus und diese Strahlen sich um O' drehen lassen, nach dem bevorzugten Meridian zu. Die entsprechenden geodätischen Linien werden die Fläche unendlich oft überdecken, da die Endpunkte derselben die Rückkehrkurve unendlich viele Male umlaufen werden, während der Anfangspunkt der geodätischen Linien von A bis B beim

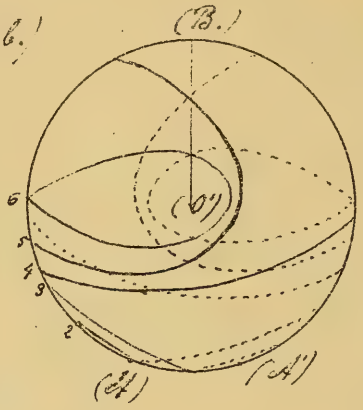
von A' bis B wandert. In Bezug auf den ausgezeichneten Meridian werden je zwei geodätische Linien symmetrisch liegen. Es sind diese Verhältnisse in einer orthographischen Projection der Fläche auf die Ebene der Rückkehrkante dargestellt in den Fig. 53, b, c.*)

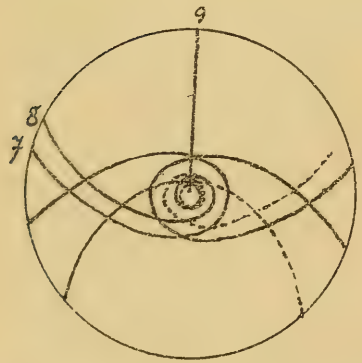
Fig. 53.

a.)



b.)





Fassen wir zusammen so werden wir folgendermassen sagen:

1. Die Interpretation der nicht-euklidischen Verhältnisse durch unsere Flächen bleibt wegen der nicht zu umgehenden Rückkehrkurven

*) Wir wollen übrigens bemerken, dass wir bei dieser Betrachtung nur einen hypothetischen Fall angenommen haben, es könnten eventuell die Punkte A und A' auch im zweiten oder dritten u.s.w. Kreisausschnitt liegen, wodurch eine kleine Modification des Gesagten nötig wird.

doch immer eine unvollkommene. So ist es z. B. un-
möglich, ein Dreieck, dessen 3 Winkel gleich 0 sind, auf
eine Fläche konstanter negativer Krümmung zu über-
tragen. Am überzeugendsten ist die Uebereinstimmung
der Flächen mit der hyperbolischen Ebene, wenn man
kleine an die Fläche angeschmiegte Figuren betrachtet.
Dieselben kann man ganz beliebig auf derselben verschieben
und bewegen, so lange man nicht an die Rückkehrcurve
stößt, ohne daß die Figuren aufhören, sich der Fläche
vollständig anzuschmiegen. Man erkennt hiernach
leicht, daß auch auf den Flächen konstanten negativen
Krümmungmaaßes genau wie in der hyperbolischen
Ebene dreifach unendlich viele Bewegungen möglich
sind.

Wenn wir nun einmal die Figuren betrachten,
die Beltrami seiner Abhandlung beigegeben hat, so
werden wir eine auffallende Uebereinstimmung
finden mit der Art der Figuren, die wir bei unserer
Betrachtung benutzten. In der That hat Beltrami
genau diese Art der ebenen Abbildung unserer
Flächen, wie wir sie benutzen. Man sollte daher
meinen, daß Beltrami die Cayley'sche Maassbe-
stimmung, die ja bereits im Jahre 1859 veröffentlicht
worde, gekannt habe. Dem ist jedoch nicht so.
Bereits 1865 ist vielmehr von Beltrami in dem

Annali di Matematiche ser. I. Bd V. in einer eigenen Untersuchung gezeigt worden, dass die Flächen konstanter negativer Krümmung so auf eine Ebene abgebildet werden können, dass den geodätischen Linien gerade Linien der Ebene entsprechen. Auf Grund dieser früheren Arbeit benutzt dann Beltrami in seinem Saggio in der That die Abbildung auf die Cayley'sche Ebene, ohne darum die Cayley'sche Theorie als solche zu erkennen. Hiermit hängt ein wesentlicher Unterschied zwischen Beltrami's Auffassung und meiner eigenen zusammen.

„Entsprechend dem Umstande, dass ihm die Cayley'sche Massbestimmung nicht bekannt war, lag Beltrami überhaupt die Auffassung fern, mit der projectiven Geometrie zu beginnen und auf sie gestützt erst den Unterschied der euklidischen und nicht-euklidischen Geometrie zu entwickeln. Für ihn ist die Abbildung auf die Cayley'sche Ebene nur ein Hülfsmittel, um die anderweitig gewonnenen nichteuklidischen Formeln zu versinnlichen. Sie ist ihm aber nicht die wahre Grundlage der nichteuklidischen Fragestellung selbst."

Es ist vielleicht von Interesse, eine vollständige

Zusammenstellung der neueren Litteratur über die Theorie der Flächen konstanter negativer Krümmung zu haben. Wir wollen dieselbe im Folgenden geben.

Wir haben bisher nur Rotationsflächen constanter Krümmung betrachtet, hat man Mittel, auch allgemeinere Flächen constanter Krümmung zu bestimmen, vielleicht die allgemeinsten Flächen? Diese Frage ist in ihrem vollen Umfange bisher noch nicht beantwortet, man hat jedoch einige besondere Specialfälle untersucht, die von Interesse sind. Wir haben hierüber Folgendes anzuführen:

1.) Dini, Comptes rendus I. 1865. In dieser Abhandlung hat Dini alle Schraubenflächen konstanter negativer Krümmung behandelt. Unter diesen befindet sich auch eine, deren Meridiankurve die Tractrix darstellt. Wir haben uns also diese Curve, anstatt sie nur einfach um ihre Axe rotieren zu lassen, zugleich gleichmäßig längs der Axe fortbewegt zu denken, um die betreffende Schraubenfläche zu erhalten (Modell).

2.) Enneper, 1868. Göttinger Nachrichten. Enneper fragte sich, giebt es Flächen konstanter Krümmung, bei denen die eine Schaar der Krümmungslinien ebene Curven darstellt? Er fand dies in der That bestätigt; er hat dann solche Flächen genauer untersucht und gezeigt, daß die Ebenen der einen Schaar der Krümmungslinien sämmtlich durch eine feste

Axe gehen, während die andere Schaar der Krümmungslinien aus sphärischen Schnitten besteht, die Kugeln angehören, deren Mittelpunkte auf der jener Axe liegen. An diese Arbeit von Enneper schließen sich 2 Göttinger Dissertationen an, in welchen je ein Typus der Enneperschen Flächen näher betrachtet wird. Es sind dies:

3.) Bockwoldt, Diss. 1876.

4.) Lenz, Diss. 1879.

Ersterer behandelt eine Fläche konstanter positiver Krümmung, letzterer eine Fläche konstanter negativer Krümmung. (Die von diesen Herren angefertigten Modelle sind noch hier in der Sammlung mathem. Instrumente u. Modelle vorhanden.)

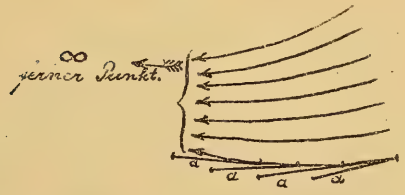
Weiter haben wir zu nennen:

5.) den Italiener Bianchi, der in seiner Dissertation 1879 (Pisa) ein merkwürdiges Theorem über Flächen konstanter negativer Krümmung aufstellte, das er dann später in den Mathem. Annalen Bd. 16. weiter ausgeführt hat. Dieses Theorem wollen wir kennen lernen, es ist in Kürze folgendes:

„Kennt man eine Fläche konstanter negativer Krümmung mit dem Krümmungsmaaß $-a^2$ und auf ihr eine Schaar paralleler geodätischer Linien

(d.h. solcher Linien, denen in der Cayley'schen hyperbolischen Ebene Strahlen entsprechen, die von einem Punkte des fundamentalen Kegelschnittes auslaufen,) so kann man eine neue Fläche derselben konstanten negativen Krümmung ableiten, indem man auf die geradlinigen Tangenten jener geodätischen Linien vom Berührungspunkte ab das Stück a in Richtung des unendlich fernen Punktes aufträgt. Die Endpunkte dieser abgetragenen Strecken bilden dann die neue Fläche im Raume. Um ein Beispiel dieser Erzeugungsweise neuer Flächen zu haben, gehe man etwa aus von der Rotationsfläche des ringförmigen Typus.

Fig. 54.

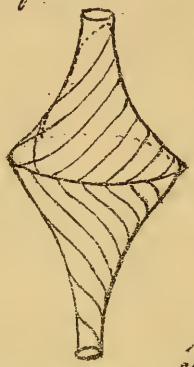


Wir wollen dann als Schaar paralleler geodätischer Linien die eine Schaar der zu einem beliebigen Meridian „parallelen Linien" ins Auge fassen. Fig. 55. [Solcher „paralleler Linien werden zwei Schaaren auftreten, da ja jede einem Meridian entsprechende Gerade der Cayley'schen Ebene zwei unendlich ferne Punkte besitzt.].

Führen wir dann bei diesen geodätischen Linien die angeführte Konstruktion aus, so entsteht die Lenzsche Fläche." Wenn wir die analoge Bianchische Konstruktion bei einer Schaar anti-paralleler geodätischer Linien der Rotations-fläche von aperiodischem Typus ausführen (v. Fig. 56.), so entsteht das „Gypsmodell von Kusen" (1881.) Die Modelle beider Flächen befinden sich in der Sammlung. (Vgl. übrigens die Erläuterungen zu diesen Modellen in dem Katalog mathem. Modelle der Verlagshandlung L. Brill in Darmstadt.)

Fig. 55

Fig. 56.



Nun sind ferner noch die merkwürdigen Arbeiten von Lie und Bäcklund zu erwähnen:

6.) Lie, Norv. Archiv für Mathematik, 1879-80. Bd. 4-5.

7.) Bäcklund, Mathem. Annalen, Bd. 19. (1882), pag. 418-422.

Beide Forscher verallgemeinern in diesen Arbeiten die Bianchische Konstruktion.

Endlich haben wir noch einer zusammenfassenden Darstellung zu gedenken, die wieder Bianchi gegeben hat:

8.) Bianchi 1886, „Lezioni die Geometria differenziale."

Es ist dies eine autographierte Ausgabe der Vorlesungen, die Bianchi in Pisa gelesen hat. Er entwickelt dort insbesondere die Lieschen und Bäcklundschen Theoreme von seinem Standpunkte aus.

Dies wäre wohl alles, was wir über die Litteratur der Flächen negativer Krümmung mitzuteilen hätten.

Zugleich sei hiermit unsere Betrachtung der ersten Periode in der Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie abgeschlossen, jener Periode, die charakterisiert war durch die Namen:

Gauss, Lobatcheffsky, Bolyai.

Wir gehen jetzt zur zweiten Periode über, die ihre hauptsächliche Vertretung findet in den Arbeiten von Riemann und Helmholtz.

Ehe wir die hierher gehörigen Schriften dieser Männer, sowie die sich an dieselben anschließenden Arbeiten anderer Mathematiker näher besprechen, wollen wir vorerst kurz die Betrachtungsweisen dieser zweiten Periode, die übrigens im Einzelnen sehr verschiedenartig sind, allgemein charakterisieren. Lobatcheffsky und Bolyai knüpften ihre Untersuchungen an geometrische Figuren an, ganz in der Weise Euklids.

Riemann und Helmholtz dagegen gehen analytisch vor. Sie legen ihren Betrachtungen gleich n unabhängige Veränderliche $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ zu Grunde.

entwickeln ganz allgemein dementsprechende Formeln und betrachten die Verhältnisse, wie sie die wirkliche Geometrie angehen, nur als specielle Anwendungen ihrer Untersuchung für den Fall $n = 3$.

Gehen wir nun zu Riemann über:

Die zu erwähnende Arbeit von Riemann ist sein berühmter Habilitationsvortrag aus dem Jahre 1854: „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen." Dieser Vortrag war nicht zur Publikation bestimmt, er ist erst 1868 aus dem Nachlasse Riemanns herausgegeben von Dedekind in Braunschweig, im Bd. 13 der Göttinger Abhandlungen. Seitdem ist jedoch diese Schrift vielfach wieder gedruckt, sie findet sich besonders auch in den gesammelten Werken von Riemann pag. 254 bis 269. (vergl. auch Bemerkungen Dedekinds hierzu auf pag. 517 der gesammelten Werke.) Obwohl die Arbeit nicht umfangreich ist, ist sie doch von grundlegender Bedeutung geworden, man kann wohl behaupten, daß jeder Mathematiker, der die moderne Entwickelung unserer Wissenschaft verstehen will, diese Schrift eingehend studirt haben muß. Wir wollen versuchen, von dem Inhalte der Arbeit, soweit uns dieselbe hier angeht, eine kurze Skizze zu geben.

In dem Hauptheile des Vortrages hält Riemann

an der analytischen Betrachtung fest. Er legt seinen Untersuchungen demnach nicht den Raum zu Grunde, sondern das, was wir, eben gemäß dieses Vortrages, eine „Mannigfaltigkeit" von n Dimensionen nennen. Das Einzelwesen, das Individuum dieser Mannigfaltigkeit soll durch das einzelne Werthsystem von n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ bestimmt sein. Man sagt wohl auch, man hat einen „Raum" von n Dimensionen, in dem ein jeder „Punkt" durch n Coordinaten festgelegt ist. Doch vermeidet Riemann diese Ausdrucksweise, eben deswegen, weil er unsern eigentlichen Raum vielmehr als Specialfall einer dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit einführen will, das Wort „Raum" also für ihn von vornherein eine ganz concrete Bedeutung hat.

Nun wollen wir uns einmal denken, es sei in dieser Mannigfaltigkeit von n Dimensionen das Quadrat der Länge des Linienelementes für jedes Werthsystem der n Variabelen in analytischer Form gegeben durch:

$ds^2 = \sum_{ik} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$, wo die a_{ik} irgend welche Funktionen der x sind. Es ist uns dies bei einer Mannigfaltigkeit von 2 Dimensionen ja bereits ganz bekannt. Denn haben wir nur zwei Variabele x_1, x_2, so können wir uns stets eine Fläche im gewöhnlichen Raum konstruirt denken, auf der wir

diese n Variablen als Coordinaten deuten. Der Ausdruck für ds^2 giebt uns dann einfach das Quadrat des gewöhnlich zu deutenden Bogenelementes für jede beliebige Stelle der Fläche an. Bleiben wir einmal bei dieser Versinnlichung für $n=2$ durch eine Hülfsfläche stehen. Wir wissen, wie ausserordentlich wichtig für jede Stelle dieser Fläche der Begriff des Krümmungsmaasses $\frac{1}{R_1 R_2}$ ist. Wir haben auch bereits gesehen, dass dieses Krümmungsmaass seinen Wert nicht ändert, welche Hülfsfläche wir auch auswählen mögen, d.h. welchen Biegungen oder Abwickelungen wir die einmal gewählte Hülfsfläche auch unterwerfen mögen. Es liegt dies eben daran, dass $\frac{1}{R_1 R_2}$ einzig und allein von der inneren Natur des Bogenelementes abhängt, die in dem Auftreten der Funktionen a_{ik} begründet liegt.

Wir wollen dies noch genauer praecisieren. In dem Falle zweier Variabeln werden wir in dem Ausdruck für das Quadrat der Länge des Linienelementes die Coefficienten a_{11}, a_{12}, a_{13} haben. Es sind dies dieselben Grössen, die wir früher mit E, F, G bezeichneten. Es ist nun Krümmungsmaass für jeden Punkt auf der Fläche gegeben durch:

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \mathcal{F}\left(a_{ik}, \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_1}, \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_1 \partial x_2}\right),$$

d.h. in Worten:

„Wir haben uns das Krümmungsmaass zu denken als eine bestimmte Funktion der a_{ik} und ihren nach den x genommenen ersten und zweiten Differentialquotienten, welche die Eigenschaft hat, nur von der Fläche abzuhängen, also unverändert denselben Wert zu behalten, wenn ich statt x_1, x_2 irgend welche andere krummlinige Coordinaten auf der Hülfsfläche einführe."

In der That hat bereits Gauss einen solchen Ausdruck für $\frac{1}{R_1 R_2}$ gefunden und eben daraus geschlossen, (wie wir hier nachträglich bemerken) daß das Krümmungsmaass unveränderlich dasselbe ist für alle Flächen, deren Bogenelement durch die gleiche Formel $\sqrt{\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k}$ sich darstellt. Man könnte vielleicht sich verwundern, warum wir die genaue Formel für das Krümmungsmaass hier nicht mittheilen, der Grund ist einfach der, weil dieselbe zu lang ist, wenn wir nicht Abkürzungen einführen wollen, die selbst eine eingehende Betrachtung erfordern würden.

Wir wollen uns nun fragen, ob wir ähnliche Betrachtungen auch in einer Mannigfaltigkeit von n Dimensionen anstellen können. Können wir vor allem auch hier ein Krümmungsmaass bestimmen?

Riemann verfährt bei der Beantwortung dieser Frage so: Er denkt sich vor allen Dingen in einer n-fach

ausgedehnten Mannigfaltigkeit die geodätischen Linien, die kürzesten Linien, berechnet und konstruiert. Diese kürzesten Linien sind solche Linien, deren Bogenlänge eine verschwindende Variation hat. Wenn wir daher die Variation des Integrals $\int ds$, welches in bestimmten Grenzen genommen uns die Bogenlänge zwischen zwei Punkten ergiebt, gleich 0 setzen, so liefert uns die Gl. $\delta \int ds = 0$ das System der Differentialgleichungen der geodätischen Linien. Von jedem Punkte der n-fachen Mannigfaltigkeit strahlen nach allen Richtungen solche geodätische Linien aus, und zwar giebt es von jedem Punkte aus ∞^{n-1} solcher Linien. Denn man kann jeden Punkt mit jedem beliebigen anderen der n fach unendlichen Mannigfaltigkeit der Punkte durch eine geodätische Linie, welche der betrachteten Mannigfaltigkeit angehört verbinden, da aber auf jeder solchen Linie selbst wieder eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Punkten liegt, so erhellt leicht der ausgesprochene Satz, daß von jedem Punkte ∞^{n-1} geodätische Linien auslaufen.

Nun sagt Riemann, wir wollen einmal ein einzelnes Büschel solcher geodätischer Linien betrachten. Wir haben dies so zu verstehen: Wir denken uns zwei beliebige von einem Punkte aus laufende geodätische Linien ausgewählt und fassen alle die geodätischen Linien eines Punktes ins Auge, deren

anfängliche Fortschreitungsrichtungen in derselben linearen Mannigfaltigkeit liegen mit den Fortschreitungsrichtungen der bevorzugten beiden Linien. [Eine geodätische Linie ist nämlich durch einen ihrer Punkte und die Fortschreitungsrichtung in derselben vollständig bestimmt.]

Fig. 57.

{ Genauer: sind dx_i' und dx_i'' die Anfangsdifferentiale zweier geodätischer Linien, so nimmt Riemann die Gesammtheit der geodätischen Linien in Betracht, für die $dx_i = \lambda' dx_i' + \lambda'' dx_i''$ }.

Riemann findet nun für jedes von einem Punkte auslaufende Büschel von Fortschreitungsrichtungen ein Krümmungsmaass indem er diese Fortschreitungsrichtungen als die Anfänge der geodätischen Linien betrachtet, sich so eine zweifach ausgedehnte von einfach ∞ vielen geodätischen Linien überdeckte Mannigfaltigkeit erzeugt und nun deren Krümmungsmaass im Gaussischen Sinne betrachtet.

Wir wollen nun gleich sehen, wie Riemann eine Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung definiert. Da einmal von einem Punkte ∞ viele Büschel auslaufen, andererseits wir auch den Punkt selbst beliebig in der Mannigfaltigkeit wählen können, so werden wir sagen:

„ Unsere Mannigfaltigkeit heisst insbesondere von konstantem Krümmungsmaasse, wenn das gesammte zunächst von der Wahl des Punktes und des von diesem auslaufenden Büschels abhängige Krümmungsmaass ungeändert bleibt, sobald ich den Büschel beliebig um den Punkt drehe oder den Punkt innerhalb der Mannigfaltigkeit beliebig wandern lasse."

Dieser Begriff einer „ n fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung " ist das wesentlichste Ergebnis der Riemannschen Betrachtung. Wir werden nun des Ferneren näher zu betrachten haben, welche Eigenschaften Riemann bei solchen n-fachen Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung zu finden weiss.

Riemann bemerkt zunächst nur ohne Beweis, dass man bei den n fachen Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung den auf pag. 207 angeführten Ausdruck $ds^2 = \Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ auf eine einfache Form bringen kann. Wenn wir das konstante Krümmungsmaass mit $+\frac{1}{a^2}$ resp. $-\frac{1}{a^2}$ bezeichnen, so sagt er, kann man das Linienelement darstellen durch die Formel:

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \ldots\ldots + dx_n^2}{1 \pm \frac{1}{4a^2}\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2\right)}.$$

Diese Form für ds^2 wollen wir des Ferneren die Riemannsche Normalform des Bogenelementes nennen. Wenn wir nun

insbesondere annehmen, daß das Krümmungsmaass gleich 0 wird, so reduciert sich ds^2 auf die noch einfachere Gestalt:

$$ds^2 = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots\ldots + dx_n^2}^{\,2},$$

die wir aus der gewöhnlichen analytischen Geometrie für $n = 2$ u. $n = 3$ kennen. Es stellt also die letzte Formel für $n = 2$ und $n = 3$ das Bogenelement der Euklidischen Geometrie dar.

Riemann hat nun für den Fall, daß $\frac{1}{a^2} = 0$ wird, noch eine andere Bezeichnung eingeführt, die jedoch nicht zu empfehlen ist. Es ist dies übrigens das Einzige, was wir in dem Riemannschen Vortrage nicht billigen möchten. Riemann beruft sich nämlich darauf, daß man für $n = 3$ im gewöhnlichen (Euklidischen) Raum Flächen konstanten Krümmungsmaasses deuten kann, die die allgemeine Betrachtung einer zweifach unendlichen Mannigfaltigkeit constanter Krümmung illustrieren.*)

Ebenso findet für $n = 2$ bei verschwindendem Krümmungsmaaß die allgemeine Betrachtung eine Deutung in der gewöhnlichen Euklidischen Ebene. Deswegen nennt Riemann die Mannigfaltigkeiten constanter, aber verschwindender Krümmungsebene Mannigfaltigkeiten.

Wir müssen jedoch sagen:

„Wenn schon die Bezeichnung Mannigfaltigkeit

*) und damit anticipiert er Beltrami's Saggio.

von Konstanten „Krümmungsmaass" einen Missverständniss Raum giebt, als Lage nämlich eine solche Mannigfaltigkeit nothwendig gekrümmt in einem höheren Raum, so ist die Benennung „ebene" Mannigfaltigkeit noch störender. Denn dieselbe scheint auszuschliessen, dass man in der Ebene andere Bogenelemente als das Euklidische Bogenelement selbe interpretiren können, während wir doch gerade in einem grossen Teil unserer Vorlesung in der Ebene eine elliptische und hyperbolische Maassgeometrie zum Gegenstand unserer Betrachtung gemacht haben und dementsprechend ein nicht-euklidisches Bogenelement definiert haben. Die Ebene der Nicht-Euklidischen Geometrie wäre also nicht „eben"

Jedoch dies sei nur beiläufig bemerkt. Riemann zeigt nun, dass eine n fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung genau so in sich bewegt werden kann, wie wir es im speciellen bei den Flächen konstanter Krümmung und bei der gewöhnlichen Ebene und dem gewöhnlichen Raum kennen. Doch fragen wir uns genauer, wie gross ist dementsprechend die Beweglichkeit der n fachen Mannigfaltigkeit?

In der Ebene giebt es, wie wir bereits sahen, ∞^3 Bewegungen. Wir können uns dies leicht folgendermassen klar machen. Wir betrachten in der Ebene 2 Punkte, die den festen Abstand $r_{1,2}$ haben mögen.

Wir können dann die Ebene beliebig so in sich verschieben, daß diese 2 Punkte mit 2 anderen irgend= wie gegebenen zusammenfallen, die denselben Ab= stand haben. Fallen unsere beiden Punkte aber einmal mit festgegebenen zwei Punkten zusammen, so ist damit die ganze Ebene festgelegt. 2 Punkte haben nun 4 Coordinaten; da dieselben jedoch einen bestimmten Abstand haben sollen, so müssen diese 4 Coordinaten einer Bedingungsgleichung genügen, so daß also nur 3 als willkürlich anzunehmen sind. Hieraus folgt, daß wir dreifach ∞ viele Bewegungen in einer Ebene haben. Eine ganz analoge Betrachtung läßt sich anstellen, wenn wir die Beweglichkeit des Raumes finden wollen. Sind nämlich drei Punkte des Raumes festgelegt, so ist damit der ganze Raum fest. An wie viel Stellen des Raumes kann ich nun drei einmal ausgewählte Punkte bringen? Die drei Punkte haben 9 Coordinaten, da jedoch die drei Seiten des von ihnen gebildeten Dreiecks eine bestimmte Länge haben sollen, so haben ihre Coordinaten 3 Bedingungs glei= chungen zu genügen, so daß nur 6 von ihnen willkür= lich zu wählen bleiben. Also giebt es ∞^6 Bewegungen des gewöhnlichen Raumes in sich. Auf Grund der Analogie mit der gewöhnlichen Ebene und dem ge= wöhnlichen Raum führen wir eine gleiche Betrachtung für die ebene Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung aus.

Wir werden daher jetzt ein Gebilde, bestehend aus n Punkten ins Auge fassen, welches die nfache Mannigfaltigkeit vollständig festlegen wird; diese n Punkte haben n^2 Coordinaten. Aber, wenn diese n Punkte bewegt werden sollen, so muß der Abstand jedes einzelnen Punktes von einem beliebigen anderen unter ihnen ungeändert bleiben. Da es nun $\frac{n(n-1)}{2}$ solcher Abstände giebt, (nämlich genau so viel, als wir die n Punkte zu zweien kombinieren können), so haben die n^2 Coordinaten $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungsgleichungen zu genügen, so daß nur $\frac{n(n+1)}{2}$ Coordinaten für die neuen Punkte beliebig zu wählen sind, in welche die ersten n Punkte bei der Bewegung übergehen sollen.

„Riemann zeigt nun in der That, daß seine n linearen sinnale Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung durch $\frac{n(n+1)}{2}$ ∞ viele Bewegungen in sich verschoben werden können."

Von dem geschilderten Standpunkte aus geht Riemann nun dazu über, den wirklichen Raum in Betracht zu ziehen. – Alle bisherigen Untersuchungen waren abstrakter analytischer Natur. Was können wir nun auf Grund der allgemeinen Betrachtung von dem thatsächlich gegebenen Raum aussagen? Unser Raum gestattet thatsächlich eine sechsfach unendliche Zahl von Bewegungen, (durch welche jeder Punkt in jeden anderen, jedes Büschel geodätischer Linien in

jedes andere übergeführt werden kann.). Riemann erkennt so in dem Raume eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung, (insbesondere wird sich das Bogenelement unseres Raumes auf die Normalform bringen lassen.) Nun sieht sich Riemann vor die Frage gestellt, welches denn der Wert des konstanten Krümmungsmasses ist. Ist derselbe gleich 0, nun so haben wir die Raumlosen der gewöhnlichen euklidischen Geometrie. Ist er negativ, so haben wir die hyperbolische Geometrie, d.h. die Geometrie, die Gauss, Lobatscheffsky, Bolyai zum Gegenstand ihrer Forschung gemacht hatten. Aber wie steht die Sache, wenn er positiv ist? Ja, an diesen Fall hatte man bisher noch nicht gedacht, oder vielmehr man hatte ihn von vornherein bei Seite geschoben, da man den Raum, wie es ja selbstverständlich sei, als ∞ ausgedehnt annahm. Da macht denn Riemann die Bemerkung, dass man sehr wohl auch diesen dritten Fall zulassen kann. Denn wenn etwa der Raum zwar endlich ist, d.h. in sich zurückläuft, und die Länge der geraden Linien, in denen er in sich zurückläuft, nur sehr gross ist, so merken wir von der ersteren Eigenschaft ja gar nichts, und wir sind daher auch gar nicht berechtigt, diese Möglichkeit auszuschliessen.

„Während also die früheren Forscher den Raum selbstverständlich unendlich annahmen, so sagt Riemann: der Raum ist zwar notwendig unbegrenzt,

aber aus der Unbegrenztheit folgt noch nicht die Unendlichkeit. Er gewinnt dadurch die Möglichkeit, neben der Annahme eines negativen oder verschwindenden Krümmungsmaaßes, auf welches sich Gauss, Lobatschefsky, Bolyai beschränkt hatten, auch die Möglichkeit positiven Krümmungsmaaßes in Betracht zu ziehen, so daß also neben der hyperbolischen und parabolischen Geometrie die elliptische tritt, neben dem Gaussischen Raum ein Riemannscher Raum.

Man wird verstehen, daß in dem Augenblicke als dieser Vortrag Riemanns veröffentlicht wurde, die allgemeinste Aufmerksamkeit sich ihm zuwandte, und in rascher Folge eine große Zahl von Arbeiten im Anschluß an denselben entstanden sind. Es kann gar nicht hier die Absicht sein, alle diese Arbeiten durchzusprechen. Wir wollen uns darauf beschränken, nur drei derselben zu nennen. Zwei von ihnen beschäftigen sich damit, ganz allgemein die homogenen Differentialausdrücke $\sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ zu klassificieren. Wir wissen, eine Schraubenfläche z. B. ist zwar in sich beweglich, doch besitzt sie nicht das volle Maass der Beweglichkeit in sich wie eine Fläche konstanter Krümmung, sie läßt nur eine Windung um ihre Axe zu. Ebenso kann auch der n-fach ausgedehnte Raum möglicherweise

in sich beweglich sein, ohne doch die gesammte Beweglichkeit der Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung in sich zu besitzen, und dieses Kriterium bildet die Grundlage für die Classificierung der Formen $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ für n Variable. Die bahnbrechenden Arbeiten sind auf diesem Gebiete die beiden, welche wir erwähnen wollten:

1.) Christoffel, Crelle 70. (1869.)

2.) Lipschitz, Crelle 70, 71, 72. (1869-70). Es sind dies sehr schwierige, aber auch sehr schöne Untersuchungen, an die seitdem vielfach angeknüpft ist. Neben diesen beiden Arbeiten haben wir als dritte eine Arbeit auszuführen, die sich speciell mit Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung beschäftigt hat und zum ersten Mal klar gestellt hat, was dies für Mannigfaltigkeiten sind. Dieselbe ist wieder von Beltrami geliefert und unmittelbar nach der Publikation von Riemanns Vortrag unter dem Titel: Teoria fondamentale degli spazii di curvatura constante veröffentlicht in den Annali di Matematica ser. 2 II. (1868.)

In dieser Arbeit wird dargelegt, was wir unter Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung zu verstehen haben, wie die Normalform des Bogenelementes für dieselbe hergestellt werden kann,

welche Bewegungen die Mannigfaltigkeit in sich zulässt, u. s. w. Wir müssen hierauf noch etwas näher eingehen. Uebrigens wollen wir das betreffende Referat in ähnlicher Weise einleiten, wie neulich über die erste Arbeit Beltrami's, wo wir einen Excurs über die Abwickelbarkeit und über die Flächen konstanter Krümmung vorausschickten. Wir werden nämlich zunächst kurz die Theorie der konformen Abbildung von Flächen betrachten, um Beltrami's Resultate später wieder klar praecisieren zu können.

Wir haben gesehen, wenn man 2 Flächen auf einander abwickeln kann, so ist das Bogenelement ds der einen Fläche an jeder Stelle gleich dem der anderen Fläche. Diese Bedingung ist zugleich auch hinreichend für die Abwickelbarkeit zweier Flächen auf einander. Wenn wir jedoch 2 Flächen nicht auf einander abwickeln, sondern nur auf einander konform abbilden wollen, so genügt es, wenn ds = M ds ist, wo M irgend welche Funktion des Ortes sein soll. Auch diese Bedingung ist zugleich hinreichend und notwendig. Bei dieser Beziehung der einen Fläche auf die andere werden beim Uebergang von der einen Fläche zur anderen die Bogenelemente an jeder Stelle in bestimmtem Maasse vergrößert resp. verkleinert, die Figuren an dieser Stelle

auf beiden Flächen werden daher einander nicht kongruent, sondern ähnlich werden, wobei aber das Ähnlichkeitsverhältnis für die verschiedenen Orte wechselt, da M nicht konstant zu sein braucht. Die Winkel übertragen sich dabei ungeändert.

Nun wollen wir einmal 4 verschiedene zweidimensionale Mannigfaltigkeiten neben einander stellen.

1.) Die erste sei die Ebene, die mit elliptischer Maassbestimmung ausgestattet ist, oder, wie wir kurz sagen wollen, die elliptische Ebene. Wir legen unseren Betrachtungen gewöhnliche rechtwinklige Coordinaten zu Grunde. Es sei dann der Fundamentalkegelschnitt als Kreis gegeben durch $x_1^2 + y_1^2 + a^2 = 0$, die Konstante k sei gleich $\frac{a}{2}$. Das Bogenelement dieser elliptischen Maassbestimmung wollen wir ds_1 nennen. Es ist dann gemäss früherer Untersuchungen:

$$ds_1^2 = \frac{dx_1^2 + dy_1^2 + \frac{(y_1\,dx_1 - x_1\,dy_1)^2}{a^2}}{\left(1 + \frac{x_1^2 + y_1^2}{a^2}\right)^2}$$

2.) Daneben stellen wir die parabolische Ebene, d.h. die Ebene, die mit parabolischer Maassbestimmung ausgestattet ist. In derselben gelten geradezu die gewöhnlichen Euklidischen Maassbestimmungen. Wenn wir die rechtwinkligen Coordinaten in derselben x_2, y_2

nennen, so ist: $ds_2 = dx_2^2 + dy_2^2$.

3.) Endlich zählen wir die hyperbolische Ebene, d.h. die Ebene mit hyperbolischer Maassbestimmung. In diesem dritten Falle wollen wir mit x_3, y_3 die rechtwinkligen Coordinaten der Ebene bezeichnen. Es soll dann $x_3^2 + y_3^2 - a^2 = 0$ der Fundamentalkreis für unsere hyperbolische Maassbestimmung sein. Es wird für das Bogenelement ds_3 bei gehöriger Annahme von k eine ganz ähnliche Formel gelten wie für ds_1 unter 1), die wir erhalten, wenn wir in jener $-a^2$ für a^2 substituieren. Es wird so:

$$ds_3^2 = \frac{dx_3^2 + dy_3^2 - \frac{(x_3\,dx_3 - x_3\,dy_3)^2}{a^2}}{\left(1 - \frac{x_3^2 + y_3^2}{a^2}\right)^2}$$

4.) Nun wollen wir neben diesen 3 Mannigfaltigkeiten noch eine Kugel annehmen, die durch die Gleichung: $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = a^2$ in gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten gegeben sein möge. Das gewöhnliche Bogenelement ds der Kugel ist dann gegeben durch: $ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$. — Nun kommt unsere Aufgabenstellung: Wir wollen die Mannigfaltigkeiten 1, 2, 3 auf die Kugel 4 konform abbilden und zwar in möglichst einfacher Weise. Wir werden die 3 Fälle einzeln durchgehen. Wir wollen die Kugel gezeichnet denken, eine Horizontalebene berührend;

der Berührungspunkt sei der Anfangspunkt $x=0$, $y=0$ der Coordinatenbestimmung in dieser Ebene. Die Coordinatenaxen ξ η mögen vom Mittelpunkt der Kugel parallel zur x und y Axe, die Axe ζ senkrecht zur xy Ebene positiv nach oben gerechnet gelegen sein.

Betrachten wir nun zunächst den Fall daß die xy Ebene die elliptische Ebene x', y', darstellt. Wenn wir dann eine <u>Centralprojektion</u> der Ebene vom Mittelpunkte der Kugel vom Radius a aus vornehmen, so wissen wir gemäß früherer Betrachtung, daß durch diese Beziehung die elliptische Geometrie der Ebene sich geradezu mit der Geometrie auf der Kugel deckt. Unsere Aufgabe ist erledigt sich daher ohne weiteres von selbst. Denn bei dieser so hergestellten Beziehung der elliptischen Ebene auf die Kugel sind die entsprechenden Bogenelemente ds, und ds einander gleich, so daß nicht nur eine conforme Abbildung der Ebene auf die Kugel, welche nur Proportionalität von ds, und ds verlangt, sondern sogar die Abwickelbarkeit der Ebene auf die Kugel dargethan ist.

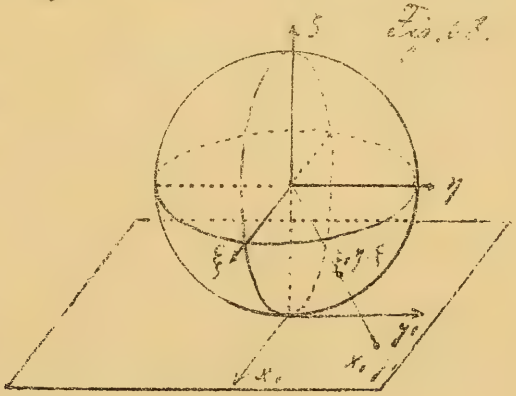


Fig. 68.

Wir wenden uns daher gleich zu dem zweiten und dritten Teil unserer Aufgabe, die parabolische und hyperbolische Ebene konform auf die Kugel abzubilden. Wir wollen gleich die Lösung geben, indem wir die Behauptung aufstellen:

Eine konforme Abbildung der Kugel auf die parabolische, bezw. hyperbolische Ebene wird geleistet, wenn wir die Kugel stereographisch bezw. orthographisch auf die xy Ebene beziehen.

Dies ist ein sehr einfaches Resultat; wir werden dasselbe als richtig nachweisen, indem wir die bezüglichen Formeln einfach durchrechnen. Wir werden zugleich auch neue eine schöne Deutung für die hyperbolische Geometrie erhalten, an welche weiterhin deren Beziehung in der Funktionentheorie anknüpfen wird. Schließlich werden wir auf diese Betrachtung skizzenhaft aus der Beltramischen Arbeit zurückkommen.

Dies die Aufgabe der folgenden Stunde.

Wir geben zunächst den Nachweis, daß, wie die Behauptung sagt, die parabolische Ebene durch stereographische Projection auf die Kugel konform abgebildet wird. Durch die stereographische Projection wird jedem Punkte der Ebene durch einen vom Nordpol der Kugel ausgehenden Strahl ein entsprechender Punkt der Kugel zugeordnet. Die Formeln, welche diese Beziehung in den Coordinaten der Punkte ausdrücken,

dürfen wir wohl einfach mittheilen, da die (übrigens einfache) Ableitung derselben uns nur unnöthig aufhält.

Die Formeln, welche die Coordinaten eines Punktes in der Ebene durch die Coordinaten des entsprechenden Punktes auf der Kugel ausdrücken, sind:

$$x_2 = 2a \cdot \frac{\xi}{a-\zeta}, \qquad y_2 = 2a \cdot \frac{\eta}{a-\zeta}.$$

Umgekehrt sind die Formeln, welche die Coordinaten eines Punktes auf der Kugel durch die Coordinaten des entsprechenden Punktes in der Ebene ausdrücken, gegeben durch:

$$\xi = \frac{4a^2 x_2}{N}$$
$$\eta = \frac{4a^2 y_2}{N}$$
$$\zeta = \frac{a(x_2^2 + y_2^2 - 4a^2)}{N},$$

wo N die Abkürzung bedeutet:

$$N = x_2^2 + y_2^2 + 4a^2.$$

Es ergibt sich aus diesen Beziehungen noch die kurze Formel:

$$a - \zeta = \frac{8a^3}{N},$$

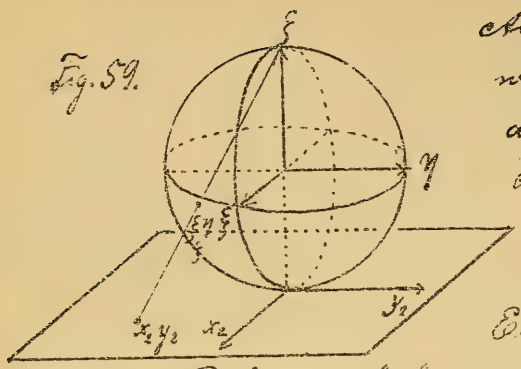
welche wir gleichfalls wegen späterer Anwendung merken wollen.

Wir wollen nun die Beziehung zwischen ds_2 und $d\sigma$ aufsuchen. Es ist: $ds_2^2 = dx_2^2 + dy_2^2$. Drücken wir hierin gemäß der obigen Formeln dx_2^2 und dy_2^2 durch $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ aus, so kommt nach einiger Umformung:

$$ds_2^2 = \frac{4a^2(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2)}{(a-\zeta)^2} \qquad \text{oder:}$$

$$ds_2 = \frac{2a}{a-\zeta} d\sigma.$$

Fig. 59.



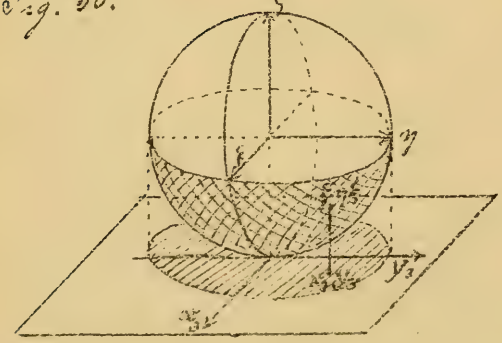
Aus dieser Formel ersehen wir sofort, daß in der That durch die stereographische Projection die parabolische Ebene auf die Kugel konform abgebildet ist.

Eine analoge, aber noch viel leichtere Rechnung haben wir nun für den Fall der orthographischen Projection zu führen, welche die konforme Abbildung der hyperbolischen Ebene auf die Kugel leisten soll. Es seien $x_3\ y_3$ die Coordinaten in der Horizontalebene, die Kugel habe wieder den Radius a.

Es ist offenbar:

$$x_3 = \xi,$$
$$y_3 = \eta.$$

Fig. 60.



Wir haben in der hyperbolischen Ebene die Maaßbestimmung, die sich auf den Kreis $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ gründet, nur im Inneren dieses Kreises in Betracht zu ziehen. Bei der orthographischen Projection wird dann dieser Bereich der inneren Kreisfläche sowohl auf die obere Hälfte, wie auf die untere Hälfte der Kugel bezogen. Wir wollen die untere Hälfte der Kugel als Bild unserer Ebene hervorzugen.

Dann gilt für ξ die Gleichung:

$\xi = -\sqrt{a^2 - x_3^2 - y_3^2}$, wo das minus-Zeichen gerade unserer Verabredung entspricht. Drücken wir nun gemäss dieser Formeln $d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$ durch dx_3 und dy_3 aus, so kommt:

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \frac{dx_3^2 + dy_3^2 - \frac{(x_3\,dy_3 - y_3\,dx_3)^2}{a^2}}{1 - \frac{x_3^2 + y_3^2}{a^2}}$$

Wenn wir aber den Ausdruck rechts vergleichen mit dem Ausdruck für ds_3, dem Bogenelement der Cayleyschen Ebene, so ist ersterer genau gleich gebaut wie letzterer, nur tritt im letzteren der Nenner im Quadrat auf. Wir haben so die Formel gefunden:

$$ds_3^2 = \frac{d\sigma^2}{1 - \frac{x_3^2 + y_3^2}{a^2}}$$

. Setzen wir für $a^2 - x_3^2 - y_3^2$ wieder ξ^2 und ziehen auf beiden Seiten die Wurzel, so kommt das einfache Schlussergebnis:

$$ds_3 = -\frac{a\,d\sigma}{\xi}.$$

Dieser Formel haben wir ein minus-Zeichen gegeben, da wir es unserer Verabredung zufolge mit Punkten zu thun haben für die ξ negativ ist. Auch diese Formel zeigt uns sofort, dass durch die orthographische Projection der Kugel auf die hyperbolische Ebene eine konforme Abbildung beider Flächen geleistet ist.

Zusammenstellung:

1. $ds_1 = d\sigma$. Formel für das elliptische Bogenelement.

2. $ds_2 = \frac{2a}{a-\xi} d\sigma$. Formel für das parabolische Bogenelement.

3. $ds_3 = -\frac{a}{\xi} d\sigma$. Formel für das hyperbolische Bogenelement.

Wir haben so erreicht, was wir am Schlusse der vorigen Stunde in Aussicht gestellt hatten. Wir wollen uns nun gleich zu Folgerungen wenden, die wir aus unserer Betrachtung ziehen können.

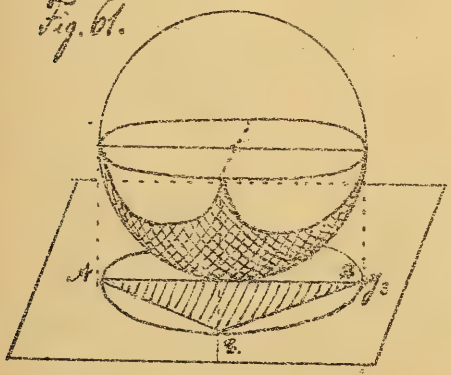
Durch die orthographische Projection wurde die untere Hälfte der Kugel auf die hyperbolische Ebene übertragen. Umgekehrt ergibt die geometrische Betrachtung sofort den Satz:

„Indem wir $d_3 = -\frac{a}{\xi} d\sigma$ schreiben, übertragen wir die hyperbolische Geometrie so auf die vom Aequator begrenzte Halbkugel, daß der geraden Linie der hyperbolischen Ebene diejenigen Kreise der Kugel entsprechen, die auf dem Aequator senkrecht stehen. Den Winkeln aber, unter denen sich in der hyperbolischen Ebene zwei gerade Linien schneiden, entsprechen die gewöhnlichen Winkel, unter denen sich die genannten Kreise auf der Kugel schneiden.

Das ist in der That eine sehr bequeme Abbildung, durch welche wir Verhältnisse häufig augenfällig machen können, die in der hyperbolischen

Geometrie sich als wunderbar erweisen. Betrachten wir z. B. ein Dreieck, dessen sämmtliche Winkel gleich 0 sind. Wir wissen, dass die Ecken eines solchen Dreiecks auf dem Fundamentalkegelschnitt liegen. Es sei ein solches Dreieck einmal begrenzt gegeben durch die y_3 Axe von A nach B und beliebige andere Seiten, die sich in C schneiden mögen. Aus der y_3-Axe entsteht bei der Uebertragung auf die Kugel ein Halbmeridian, aus den anderen beiden Seiten dagegen Halbkreise, die auf dem Aequator senkrecht stehen. (Fig. 61.) Wir erhalten so auf der Kugel ein „sphärisches Dreieck, dessen 3 Winkel nun ganz offenbar gleich 0 sind. (Der Begriff „sphärisches Dreieck" ist hier natürlich in einer erweiterten Bedeutung gebraucht als gewöhnlich, es bezeichnet ein Dreieck, dessen Seiten in Verticalebenen zu der Aequatorebene liegen). Wir werden überhaupt in Bezug auf dies Beispiel den Satz aussprechen dürfen:

Fig. 61.



Die Uebertragung der hyperbolischen Geometrie auf die Kugel ist insofern besonders nützlich, als sie alle Theoreme über Winkelgrössen ohne weiteres vor Augen stellt."

Wir wollen nun noch einen Schritt weiter thun

und die Abbildung 2. und 3. kombinieren. Nämlich: Nachdem wir die hyperbolische Ebene durch orthographische Projection auf die Halbkugel übertragen haben, können wir diese wieder auf die parabolische Ebene stereographisch projicieren. Wenn wir das verbindende Zwischenglied der Abbildung auf die Kugel unberücksichtigt lassen, können wir dann auch sagen: Wir werden die hyperbolische Ebene auf die parabolische Ebene conform abbilden. Die Formel, welche die Beziehung zwischen ds_3 und ds_2 ergiebt, erhalten wir aus den Formeln 2. u. 3. der pag. 228 wie folgt:

$$ds_3 = -\frac{a}{\xi}\,d\sigma = ds_2 \cdot \frac{a-\xi}{-2\xi}$$ oder wenn wir für ξ und $a-\xi$ die Werte aus den Formeln pag. 225 eintragen,

$$ds_3 = \frac{ds_2}{1 - \frac{x_2^2 + y_2^2}{4a^2}} = \frac{\sqrt{dx_2^2 + dy_2^2}}{1 - \frac{x_2^2 + y_2^2}{4a^2}}.$$

In Worten lautet dies Ergebnis:

„Man kann die hyperbolische Ebene so auf die gewöhnliche konform abbilden, daß $ds_3 = \frac{\sqrt{dx_2^2 + dy_2^2}}{1 - \frac{x_2^2 + y_2^2}{4a^2}}$ wird."

Wir können dieses Resultat jedoch noch anders interpretieren: Anstatt zu sagen, wir übertragen die eine Ebene auf die andere, können wir auch sagen, wir führen $x_2\, y_2$ als gewisse krummlinige Coordinaten in der hyperbolischen Ebene ein. Denn natürlich ent-

sprechen den rechtwinkligen Coordinaten in der gewöhnlichen Ebene bei der Abbildung in der hyperbolischen Ebene, allgemein zu reden, krummlinige Coordinaten. Wir werden daher sagen:

Wir können in der hyperbolischen Ebene x_2, y_2 so als krummlinige Coordinaten einführen, daß das Bogenelement die Gestalt annimmt:

$$ds_3 = \frac{\sqrt{dx_2^2 + dy_2^2}}{1 - \frac{x_2^2 + y_2^2}{4a^2}}$$

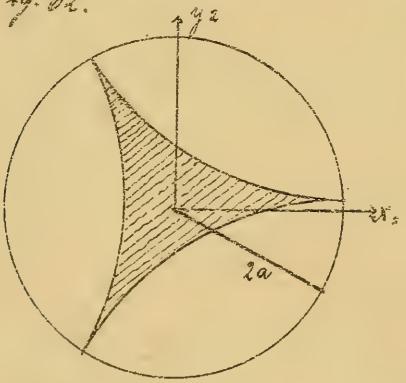
Hier bemerken wir aber sofort, daß die letzte Formel ja gerade die Gestalt hat, welche Riemann als Normalform für das Bogenelement einer Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung aufgestellt hat. Wir haben so also die Riemannsche Normalform des Bogenelementes für das zweidimensionale Gebiet der hyperbolischen Ebene dargestellt.

Nun wollen wir uns aber die Figuren in der parabolischen Ebene, die bei der conformen Abbildung der hyperbolischen Ebene sich ergeben, einmal näher ansehen. Wir denken also die untere Halbkugel (Fig. 60), welche das Bild der hyperbolischen Ebene ist, durch stereographische Projection auf die gewöhnliche Ebene übertragen. Wir sehen sogleich, der Aequator geht bei der Projection über in einen Kreis vom Radius $2a$. Was aber werden die geradlinigen Linien der hyperbolischen Ebene werden? Dieselben wurden auf der Halbkugel durch Orthogonalkreise des Aequators dargestellt. Nun aber bleiben Kreise bei stereographischer

Projektion Kreise. Folglich können wir zusammenfassend sagen:

Überträgt man die hyperbolische Geometrie durch konforme Abbildung auf die gewöhnliche Ebene, indem man setzt $ds = \frac{ds_2}{1 - \frac{x_2^2 + y_2^2}{4a^2}}$, so verwandelt sich der Cayleysche Kegelschnitt in einen Kreis vom Radius 2a. Die graden Linien verwandeln sich in die Orthogonalkreise dieses Grundkreises und die hyperbolisch gerechneten Winkel in die gewöhnlich gerechneten Winkel.

Fig. 62.



In der That ist es auch jetzt sehr einfach, in der parabolischen Ebene z. B. ein Dreieck zu zeichnen dessen 3 Winkel gleich 0 sind. Fig. 62 zeigt ein solches, die Seiten desselben sind Ringe von Orthogonalkreisen zu dem Fundamentalkreis mit dem Radius 2a.

Wir können so alle Theoreme, welche die hyperbolische Geometrie behandelt, aufs schönste uns versinnlichen.

Wir haben diese Betrachtung jedoch nicht deswegen vorgetragen, um abermals eine neue Abbildung für die hyperbolische Geometrie zu geben, sondern aus einem viel weiter reichenden Grunde. Die nicht-euklidische Geometrie tritt

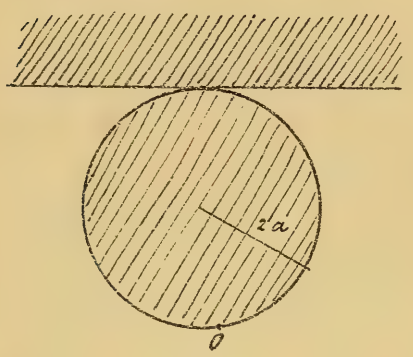
nämlich in der neueren Entwickelung der Funktionentheorie ganz maassgebend auf. Ich denke an solche Untersuchungen, wie sie beispielsweise die Arbeit von Prof. H. A. Schwarz im Bd. 75, Crelle: „Ueber die hypergeometrische Reihe" bringt. In diesem Teil der Funktionentheorie nun hat man außerordentlich viel mit Kreisbogen zu thun, die gegen einen Fundamentalkreis orthogonal stehen, und bei diesen Betrachtungen leistet dann die nichteuklidische Geometrie in dem Sinne das, dass man die Winkel im gewöhnlichen Sinne misst, die Länge der Bogen dagegen als $\int ds_3$, wesentliche Dienste.

Wir können schon jetzt darauf hinweisen, dass diese Verhältnisse in der Vorlesung des nächsten Semesters uns eingehend beschäftigen werden. Dabei werden wir also die Gleichung $ds_3 = \frac{\sqrt{dx_2^2 + dy_2^2}}{1 - \frac{x_2^2 + y_2^2}{4a^2}}$ unsern Betrachtungen zu Grunde legen müssen.

Doch dies nebenbei. Wir können nun die Figuren und Formeln noch ein wenig modificieren. Nämlich wenn wir eine Transformation durch reciproke Radien vornehmen und den Mittelpunkt desselben als einen Punkt unseres Orthogonalkreises wählen, so wird das Innere des Kreises in eine Halbebene verwandelt werden. Hierbei wird der Kreis selbst der Begrenzungslinie der Halbebene entsprechen. Vgl. die Figur, wo O der Mittelpunkt der Transformation und der (nicht gezeichnete) Inversionskreis den Radius $4a$ besitzt. Diese Transformation stellt nochmals eine konforme Abbildung dar, wir werden sehen, wie sich

dementsprechend unsere Figuren und Formeln modificieren.

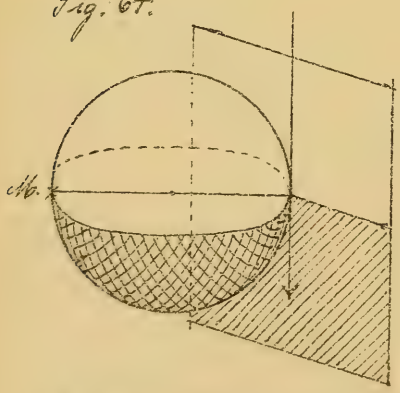
Fig. 63.



Vorerst jedoch wollen wir noch eine Bemerkung voraus-schicken, nämlich folgende:

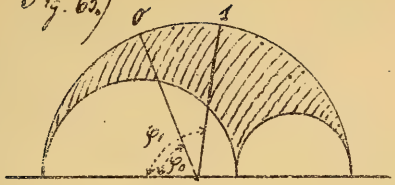
„Wir hätten auch direkt von unserer Hülfskugel zur Halb-ebene übergehen können, indem wir die stereographische Projection nicht vom obersten Punkte der Kugel aus, sondern von einem Punkte ihres Aequators aus auf die diesem zugehörige Antipoden-ebene vornahmen. Hierbei geht, wie man sofort sieht, die Aequatorlinie in die Begrenzungs-gerade der Halbebene über. –

Fig. 64.



Wir wollen nun die einfachen Formeln und Figuren, die sich bei der Abbildung auf die Halbebene ergeben, noch mitteilen. Aus den Orthogonalkreisen in der früheren parabolischen Ebene werden wieder Orthogonalkreise und zwar Orthogonal-kreise zur Begrenzungslinie werden. die Fig. 62. wird daher in die Fig. 65. übergehen. Die Begrenzungslinie selbst ent-spricht dabei natürlich dem unendlich Weiten, dem funda-mentalen Kegelschnitt der Cayleyschen Ebene. Das Ds der

Fig. 65.)



hyperbolischen Geometrie wird sich jetzt, wenn wir die Begrenzungslinie als X-Axe wählen, die y-Axe dagegen in einer beliebigen Lage senkrecht zu derselben, folgendermaßen ausdrücken: $ds_3 = a \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}$, wie wir mit Unterdrückung der Zwischenrechnung mitteilen.

Wenn wir dann z. B. wissen wollen, wie lang der bestimmte Kreisbogen von 0 bis 1 der Halbebene in der hyperbolischen Geometrie ist, so haben wir $\int ds_3$ nur längs desselben von 0 bis 1 auszuführen. Dies aber läßt sich ganz einfach machen, wenn wir den Hilfswinkel φ einführen als Winkel des Radius gegen die Begrenzungslinie der Halbebene. Dann ergibt sich, daß das Integral $\int_0^1 ds_3 = a\left(\log.tg\frac{\varphi_1}{2} - \log.tg\frac{\varphi_0}{2}\right)$ ist.

So haben wir also schließlich die hyperbolische Geometrie in eine Form gebracht, an der sie außerordentlich konkret zur Anschauung gebracht ist. Gerade diese Form der hyperbolischen Geometrie ist es auch, die der französische Mathematiker Poincaré, mit dem wir uns im nächsten Semester noch eingehend werden zu beschäftigen haben, seinen Untersuchungen zu Grunde gelegt hat.

Wir wollen nun dazu übergehen, die beabsichtigte

Anwendung von unserer Betrachtung zu machen, indem wir über die bereits erwähnte Abhandlung von Beltrami referiren: Teoria fundamentale degli spazii di curvatura constante. Es handelt sich in derselben geradezu um folgendes:

Beltrami macht sich den Begriff einer n fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung klar, indem er alle Formeln, welche wir für n=2 gaben, für ein beliebiges n aufstellt.

Hierbei ist jedoch ein wesentlicher Unterschied gegenüber unserer Betrachtungsweise darin begründet, daß er die Bayley'sche Abhandlung nicht kennt. Er legt dementsprechend der Betrachtung der Maßbestimmung nicht die Bayley'schen Entwickelungen für n Variable, sondern gleich die „Kugel" des (n+1) fach ausgedehnten Raumes zu Grunde, ganz dementsprechend, wie wir in der letzten Stunde die elliptische, parabolische, hyperbolische Maßgeometrie in der Ebene auf die gewöhnliche Kugel übertragen haben.

Sei im R_{n+1} die „Kugel vom Radius a" gegeben durch die Gleichung: $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots\dots + \xi_{n+1}^2 = a^2$, so wird das „gewöhnliche" Bogenelement auf dieser Kugel dargestellt durch: $ds = \sqrt{d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + \dots\dots + d\xi_{n+1}^2}$.

Die so auf der Kugel festgelegte Maßbestimmung ist nun für Beltrami ohne Weiteres das Bild einer Maßbestimmung konstanter positiver Krümmung $\frac{1}{a^2}$ einer

n-fachen Mannigfaltigkeit konstanter positiver Krümmung.

Um nun weiter auch die Maassbestimmung im nfach ausgedehnten Raume konstanter negativer Krümmung zu begründen, setzt Beltrami auf der Kugel des Raumes von $(n+1)$ Dimensionen $ds = -\frac{a\,d\sigma}{\xi_{n+2}}$. Insbesondere eliminiert er hieraus die Variable ξ_{n+2}. So bekommt er im Raum von n Dimensionen $(\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_n)$ durchaus die gleiche Maassbestimmung, welche sich in Cayleyscher Weise ergeben würde, wenn man daselbst die Kugel $\xi_1^2 + \ldots\ldots + \xi_n^2 = a^2$ als absolutes Gebilde zu Grunde legte und die charakteristische Konstante $k = \frac{a}{2}$ nähme.

Wir erkennen, dass es sich in der That um dieselben Betrachtungen und Formeln handelt, wie in letzter Stunde, nur sind dieselben ausgedehnt auf n Variable.

Wir werden dies noch besser einsehen, wenn wir als Beispiel des letzten Satzes den Fall $n=3$ näher betrachten. In diesem Falle wird $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = a_2^2$, indem wir ξ_1, ξ_2, ξ_3 als rechtwinklige Coordinaten des Euklidischen Raumes denken, eine Kugel im gewöhnlichen Sinne des Wortes ergeben, und wir würden uns vorzustellen haben, dass wir im Innern dieser Kugel unsere Konstruktion mit den geraden Linien, Ebenen u. s. w. vornehmen, geradeso wie wir in der hyperbolischen Ebene im Innern des Fundamentalkreises operiert haben. Es ist dies natürlich nur ein specieller Fall der hyperbolischen Geometrie der R_3. Denn wie wir in

Cayley's Maassgeometrie der Ebene allgemein auch eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel zu Grunde legen konnten, wenn es überhaupt nur ein einteiliger Kegelschnitt war, so würde man auch hier im Raume von 3 Dimensionen die hyperbolische Maassbestimmung statt auf die Kugel, auf ein Ellipsoid oder ein zweischaliges Hyperboloid oder ein elliptisches Paraboloid, d. h. irgend welche einteilige nicht geradlinige Fläche 2. Grades als absolutes Gebilde beziehen können.

Wir haben nun demnächst von den Arbeiten von Helmholtz über die nichteuklidische Geometrie zu berichten; Helmholtz kennt ebenfalls Cayley's Maassgeometrie als solche nicht. Er gebraucht dementsprechend in seinen Untersuchungen einen Ausdruck, den wir eben nun gut verstehen können, und den wir dementsprechend hier gleich mitteilen wollen, damit wir späterhin mit denselben bereits vertraut sind. Helmholtz nennt nämlich diese besondere Art der Cayley-schen Maassgeometrie des Raumes von 3 Dimensionen, auf welche wir hier geführt wurden, wo nämlich als absolutes Gebilde speciell eine Kugel des gewöhnlichen Raumes, vom Radius a, zu Grunde gelegt ist, während die charakteristische Konstante $= \frac{a}{2}$ genommen wird, „Beltrami's kugelförmiges Abbild der nicht-euklidischen Geometrie."

Im übrigen muss ich jetzt gegen einen gewissen

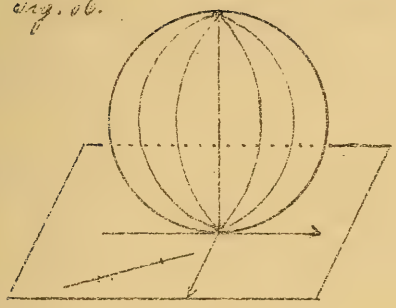
Punkt der Beltramischen Untersuchung polemisieren. Es handelt sich um eine Behauptung, die er in dem „Saggio" und in der „Teoria" ausspricht. Kehren wir zunächst zu der Mannigfaltigkeit zweier Dimensionen zurück ($n = 2$), so werden wir gewiß sagen, auf der durch $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = a^2$ gegebenen Kugel herrscht (dem Bogenelemente ds entsprechend) in jedem Punkte das konstante positive Krümmungsmaaß $\frac{1}{a^2}$. Die Geometrie auf dieser Kugel ist nun für Beltrami, wie wir sagten, geradezu der Typus für die Theorie der Geometrie auf Flächen konstanter positiver Krümmung. Wenn wir nun auf der Kugel 2 geodätische Linien ziehen, so wissen wir, schneiden sich dieselben in 2 diametral gegenüberliegenden Punkten. Wenn wir aber die Kugel durch Centralprojection auf die Ebene beziehen und so die elliptische Maaßbestimmung in der Ebene betrachten, so schneiden sich die geraden Linien daselbst nicht in zwei, sondern nur in einem Punkte. Wir haben ja auch bereits besprochen, woran die Schwierigkeit liegt, sich diese Beziehung zwischen der Kugel und der Ebene genau vorzustellen. Wir haben eben die Ebene als eine Doppelfläche aufzufassen, im Gegensatz zu der Kugel, die eine einfache Fläche darstellt. Es werden sich ja auch die geraden Linien der Ebene zweimal schneiden, wenn wir uns die Ebene als doppelt überdeckt denken wollen. Denn es

werden dann die geraden Linien erst geschlossen sein, wenn wir zweimal die Ebene durchlaufen haben, nämlich einmal die Vorderseite, das andere Mal die Unterseite der Ebene. Wir werden so auch 2 Schnittpunkte der geraden Linie erhalten, doch liegen dieselben auf den beiden Seiten der Ebene genau über einander, sind also schließlich doch nur ein Schnittpunkt. Dies wird jedoch von Beltrami nicht beachtet, und dem entsprechend stellt er allgemein den Satz auf:

„In einem Raum von 2 Dimensionen konstanter positiver Krümmung müssen sich 2 geodätische Linien immer in 2 Punkten schneiden."

Wir wollen zunächst noch bis zu einer gewissen Zuspitzung dieser Behauptung vordringen. Wenn wir nämlich irgend 2 Punkte in der Ebene annehmen, so geht durch diese auf alle Fälle nur eine geodätische Linie, nämlich die Verbindungslinie. Wenn wir aber auf der Kugel zwei Punkte insbesondere diametral gegenüber wählen, so geht durch dieselben offenbar ein ganzer Büschel geodätischer Linien, d. h. größter Kreise hindurch. Wenn wir daher in der gewöhnlichen Geometrie lernen, daß eine gerade Linie stets durch 2 ihrer Punkte bestimmt ist, so läßt sich dieser Satz nicht allgemein auf die Kugel übertragen. Also, sagt Beltrami, ist mit der Annahme eines konstanten positiven Krümmungsmaßes jenes sogenannte Axiom der Geometrie nicht verträglich. Von unserem

Fig. 66.



Standpunkte aus müssen wir diese Behauptung natürlich als eine irrige zurückweisen; wir werden darüber hinaus darauf aufmerksam machen, daß der Zusammenhang, den die Flächen, auf denen eine bestimmte Form des Bogenelementes gilt, im Großen und Ganzen haben, ein verschiedener sein kann. Wir bemerken übrigens, daß wir diese Behauptung Beltrami's besonders deswegen so scharf zurückweisen müssen, weil einmaliger Einspruch nicht genügt hat,*) vielmehr immer wieder auch von neueren Autoren auf Beltramis Behauptung zurückgegriffen wird. Wir werden das bisher Gesagte zusammenfassend folgendermaßen aussprechen:

„Indem Beltrami die in sich zurücklaufende Kugelfläche als Typus der Mannigfaltigkeit konstanter positiver Krümmung nimmt, kommt er zu dem falschen Satze, daß auf jeder solchen Mannigfaltigkeit gewisse Verhältnisse vorliegen müssen, die auf der Kugel in der That vorliegen, daß nämlich auf jeder solchen Mannigfaltigkeit zwei geodätische Linien, die sich schneiden, sich immer in zwei Punkten schneiden müssen und daß also die geodätische Linie nicht ausnahmslos durch 2 ihrer Punkte bestimmt ist. (so daß also das

*) Vergl. Math. Annalen, VI, p. 125; wir kommen hierauf übrigens noch später zurück.

sogenannte Axiom von der geraden Linie nicht unbeschränkt gültig erscheint.)

Wir werden die Streitfrage, die hier vorliegt, wie wir schon andeuteten, positiv wenden, indem wir folgendermaßen sagen:

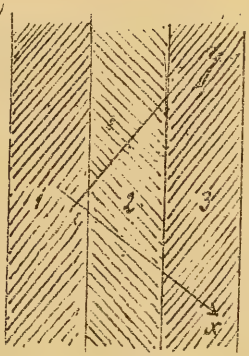
„Durch die Form des Bogenelementes ist der Zusammenhang, welchen eine Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung besitzt, eben noch keineswegs vollständig bestimmt, vielmehr wird es ein neues Problem sein, nachdem man das Bogenelement der Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung kennt, nun alle Zusammenhangsarten aufzuzählen, die mit diesem Bogenelement verträglich sind."

Wollen wir doch einmal sehen, wie sich diese Verhältnisse in der Euklidischen Geometrie gestalten. Wenn wir eine Euklidische Ebene haben, so können wir auf dieselbe einen beliebigen geschlossenen Cylinder, beispielsweise einen Rotationscylinder, beliebig oft abrollen, es wird dabei die Ebene in Streifen zerfallen, deren jeder für sich die Cylinderfläche darstellt, wenn man ihn aus der Ebene herausgeschnitten und seine Ränder zweckmäßig zusammengefügt denkt. Was nun die Geometrie auf dem Cylinder angeht, so erkennen wir sofort, daß wir dem Bogenelement auf ihm die Form $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ geben können, (eine Form, die ausnahmslos und für alle

Punkte desselben gilt *). Denn wenn wir in der Ebene ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem angenommen haben, das wir auf den Cylinder übertragen wollen, so wird jeder Punkt desselben zwar ∞ viele Coordinatenpaare besitzen, je nachdem wir ihn dem entsprechenden Punkte auf dem ersten, zweiten, dritten etc. Streifen in der Ebene zuordnen. Aber wenn wir von einem Punkte zum Nachbarpunkte übergehen, so wird der Abstand beider stets gegeben sein durch $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$. Aber darum hat die Cylinderfläche doch einen ganz anderen Zusammenhang als die Ebene. Dementsprechend ist auch die Geometrie der endlichen Figuren auf dem Cylinder natürlich eine ganz andere wie in der Euklidischen Ebene.

a/ Fig. 67.

b/



Je zwei geodätische Linien auf dem Cylinder z. B., welche durch gewöhnliche Schraubenlinien dargestellt werden, schneiden sich in unendlich

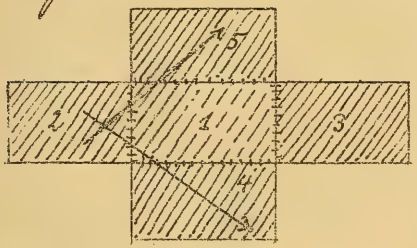
*) Wenn wir in der projectiven Geometrie dem Cylinder „eine Spitze" im Unendlichen zuschreiben, so ist dies natürlich nur eine Fiction, um ihn als Grenzfall einer Kegelfläche ansehen zu können; hierauf ist im Texte keine Rücksicht zu nehmen.

vielen Punkten während die entsprechenden geraden Linien in der Ebene nur einen Punkt gemeinsam haben. Um diesen Unterschied wegzunehmen, könnten wir zwar sagen, wir mögen uns den Cylinder so oft um sich selbst denken, dass die beiden Schraubenlinien es nur in einem Punkte, aber die Betrachtung einer derartigen unendlichen Ueberdeckung ist doch nur eine Hülfsbetrachtung, die wir künstlich einführen, um die Uebereinstimmung mit der Ebene herbeizuführen, in der That schneiden sich eben die Linien wiederholt.

Wir wollen jetzt diesen Gedanken in allgemeinerer Weise fassen. Wir zerlegten die Ebene oben in so viele congruente Streifen. Denken wir uns jetzt z. B. ein Rechteck in der gewöhnlichen Ebene gegeben, so können wir doch an dasselbe beliebig viele kongruente Rechtecke so anreihen, dass die ganze Ebene vollständig überdeckt wird. Denken wir uns nun das eine Rechteck herausgeschnitten und aus einem dehnbaren Stoff bestehend, so können wir zunächst die beiden Endseiten desselben mit einander vereinigen, hierauf dann auch noch die beiden anderen Begrenzungslinien, so dass wir einen Ring erhalten würden. Nun wollen wir auf diesem Ring dieselben Coordinaten benutzen, die wir in der Ebene haben, und geradezu das Bogenelement von der Ebene auf den Ring übertragen, wodurch wir auf diesem eine bestimmte Art der Maassbestimmung

erhalten, die natürlich mit den elementaren Maaßverhältnissen, die auf der Ringfläche herrschen mögen, nichts zu thun hat. Wieder werden dann jedem Punkte des Ringes ∞ viele Coordinatenpaare x, y zuzuordnen sein, ähnlich wie wir es bei dem Beispiel des Rotationscylinders gesehen haben.

Fig. 68.



Dagegen wird das Bogenelement an jeder Stelle die wohlbestimmte Form haben: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, welches dieser Coordinatenpaare wir auch benutzen.

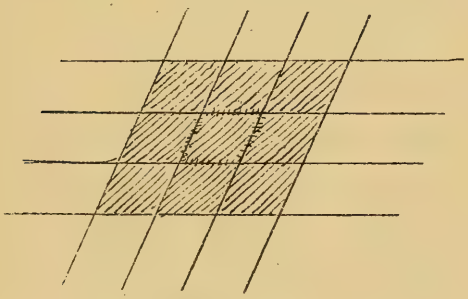
Denn sind x, y und x_1, y_1 irgend zwei Coordinatenpaare, die auf denselben Punkt der Ringfläche treffen, so sind allerdings x und x_1, y und y_1 verschieden, es ist aber doch $dx = dx_1$, $dy = dy_1$. So haben wir in der Ringfläche eine 2 dimensionale Mannigfaltigkeit mit dem eindeutig bestimmten Bogenelement $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, genau wie in der gewöhnlichen Ebene. Doch ist der „Zusammenhang" beider Flächen durchaus verschieden. Hierin, d. h. im Unterschied des Zusammenhang, liegt es dann auch begründet, daß die Ringfläche im Gegensatz zu der Ebene, wohlverstanden bei Festhaltung des Bogenelementes ds, endlich ist, d. h. einen endlichen Inhalt besitzt. Umgekehrt können wir dann sagen:

Wenn wir in der Ebene das Bogenelement am

jeder Stelle = $\sqrt{dx^2+dy^2}$ setzen, so ist damit noch gar nicht die Unendlichkeit der Ebene bedingt; die Ebene könnte ebenso gut eine Ringfläche sein.

Allgemein erkennen wir, daß die verschiedensten Beispiele geschlossener Mannigfaltigkeiten aufzustellen möglich sind, bei denen in jedem Punkte ein durchaus bestimmter Differentialausdruck von verschwindender Krümmung konstruiert werden kann. Wir wollen uns geradezu allgemein fragen, wie wir alle solche Mannigfaltigkeiten finden können, auf denen wir uns einen solchen Ausdruck $\sqrt{dx^2+dy^2}$ bestimmen können der in allen Punkten eindeutig ist. Offenbar werden wir

Fig. 69.



uns nur die Aufgabe zu stellen haben, die Ebene auf alle Weise in kongruente Stücke zu zerlegen. Wir können so z. B. die Ebene statt in Rechtecke in Parallelogramme, in reguläre Sechsecke u. s. w. zerlegt denken. Wir können dann allgemein den Grundsatz aufstellen:

„Man wird einer jeden Art entsprechend, die Ebene in lauter kongruente Parcellen zu zerlegen, sich Flächen von bestimmtem Zusammenhange verhältnißlos konstruieren können, auf denen man krummlinige

Coordinaten x, y so einführen kann, dass $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ eindeutig ist. Man braucht dann nämlich nur die einzelne Parcelle der Ebene herauszuschneiden, und sich ihre Randpunkte in zweckmäßiger Weise zusammengeheftet zu denken.

Dieses Problem, welches wir hiermit für den Fall der gewöhnlichen Ebene besprochen haben, können wir analog auch für die elliptische und hyperbolische Ebene aufstellen. Auch hier werden wir uns die Aufgabe stellen können, die verschiedensten Zusammenhangsverhältnisse zu construieren, mit denen das Bogenelement der elliptischen oder hyperbolischen Ebene verträglich ist. Wir werden wieder die Lösung derselben darin finden, dass wir das Innere des Fundamentalkegelschnittes in kongruente Parcellen zerlegen, welche dasselbe gerade einmal überdecken und aus einer solchen Parcelle dann uns in geeigneter Weise durch Vereinigung der Ränder eine Fläche herstellen. Wir werden dieses in nächster Stunde noch näher zu betrachten haben. In der That wollen wir gleich bemerken, was uns hier als eine rein geometrische Speculation entgegentritt, wird auch in gewissen Teilen der neueren Funktionentheorie eingehend behandelt. Dieselben erwachsen geradezu daraus, dass wir die hyperbolische Ebene in solche kongruente Parcellen zerlegt denken, in ähnlicher Weise, wie man zu den doppelt periodischen Functionen gelangt,

indem man von der Zerlegung der parabolischen Ebene in Parallelogramme ausgeht. Eben dies soll uns in nächster Stunde noch ausführlicher beschäftigen.

Was die Einteilung der hyperbolischen Ebene in kongruente Gebiete anbetrifft, die in ihrer Gesammtheit die Ebene genau einmal überdecken, so wollen wir bemerken, daß es eine ausserordentlich grosse Zahl solcher Zerlegungen giebt. Bei diesen macht man gern von der Darstellung der hyperbolischen Ebene Gebrauch, in welcher dieselbe auf das Innere eines Kreises, der dem Fundamentalkreise entspricht, abgebildet wird. Wie wir gesehen haben, werden die geodätischen Linien durch die Kreise gegeben, die zu den begrenzenden Kreisen orthogonal stehen. Infolge dessen kann man eine größere Anzahl neben einander liegender Polygone besser zeichnen, als wenn man an den geradlinigen Figuren der Cayley'schen Ebene festhält. Um sich einen klaren Begriff von dieser Einteilung des Kreisinnern in kongruente Parcellen zu verschaffen, verweisen wir z. B. auf die Figuren im Bd. 20 der Math. Annalen auf Tafel I. zu dem Aufsatze von W. Dyck. („Gruppentheoretische Studien.")

Ferner wollen wir jetzt in Kürze darauf eingehen, in wie fern diese Zerlegung der hyperbolischen Ebene ganz besonders functionentheoretisches Interesse besitzt. Um dies auseinanderzusetzen, wollen wir jene Deutung der hyperbolischen Geometrie anwenden,

die wir auf pag. 235. gegeben haben. Es ist der feste Kreis hierbei zur realen Axe gestreckt, und die geodätischen Linien treten als Orthogonalkreise zu dieser Axe auf. Diese Ebene wollen wir nun als die $(x+iy)$-Ebene wählen und in betreff derselben einiges lernen.

Wenn wir uns zunächst fragen, wie in der gewöhnlichen $x+iy$ Ebene sich die verschiedenen Drehungen und Parallelverschiebungen bei parabolischer (Euklidischer) Maassbestimmung darstellen, so wissen wir, dass dieselbe durch die Formel: $z' = e^{i\varphi} \cdot z + C$ ausgedrückt werden, wo z für $x+iy$ gesetzt ist. Denn der Factor $e^{i\varphi}$ entspricht einer Drehung der Ebene um den Winkel φ, (um den Punkt $z=0$), die hinzugetretene Constante C bezeichnet die Parallelbewegung. Wir wollen bei der letzten Formel besonders beachten, dass in derselben rechts 3 willkürliche Parameter auftreten, wir können ja für C setzen $a+ib$, wo a und b ihrerseits reelle Grössen sind. Diese drei Parameter φ, a, b geben eben an, dass eine 3fach unendliche Mannigfaltigkeit von Bewegungen in der Ebene möglich ist.

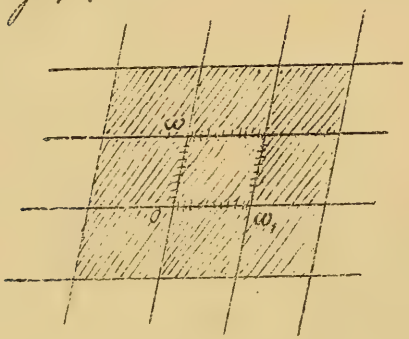
Etwas ähnliches ist nun bei unserer Darstellung der hyperbolischen Ebene der Fall, von dem wir hier erzählen wollen, ohne auf die Beweise unserer Behauptungen einzugehen. Es war das Bogenelement, wie wir wissen, ausgedrückt durch $ds = \frac{a}{y}\sqrt{dx^2+dy^2}$.

Die hyperbolische Ebene gestattet doch auch, wie wir

bereits früher sahen, 3 fach ∞ viele Bewegungen, wobei jetzt die begrenzende gerade Linie, d. h. die Abscissenaxe der xy-Ebene, in sich selbst verschoben wird. Man wird nun fragen, wie sich diese Bewegungen analytisch ausdrücken. Wir behaupten, daß dieselben gegeben sind durch die Formel $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reell und dabei die Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ sei, so daß wir sehen, wir haben wirklich 3 willkürliche Parameter. In Worten sagt diese Behauptung, daß jede Bewegung der vermöge unserer Verabredung mit hyperbolischer Maassbestimmung versehenen Ebene in sich durch eine gebrochene lineare Substitution mit reellen Coefficienten und der Determinante 1 darstellbar ist.

Nun machen wir folgenden Vergleich: Wir

Fig. 70.



wollen uns zunächst wieder die gewöhnliche Ebene denken und zwar sei dieselbe zerlegt in unendlich viele kongruente Parallelogramme, wie Fig. 70 es zeigt. Wenn in einem bewegten Parallelogramm nun die eine Ecke im Punkte 0, die beiden anderen entsprechend im Punkte ω, ω_2 liegen, wo ω_1 ω_2 komplexe Werte sind, so können wir unmittelbar sagen:

Es wird durch $z' = z + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2$; unter m_1, m_2 beliebige ganze Zahlen verstanden, die Gesammtheit aller der Verschiebungen angegeben werden, welche aus dem ursprünglichen Parallelogramm ein beliebiges anderes herstellen. Wir sehen hieraus sofort den Zusammenhang mit den doppelt periodischen Functionen. Man nennt nämlich eine Function $f(z)$ doppeltperiodisch mit den Perioden ω_1, ω_2, wenn $f(z + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)$ das = selbe ist wie $f(z)$ selbst. Es drückt sich dies eben geometrisch so aus, daß man sagt, die Werte, die $f(z)$ im ersten Parallelogramm annimmt, finden sich genau wieder in den übrigen Parallelogrammen.

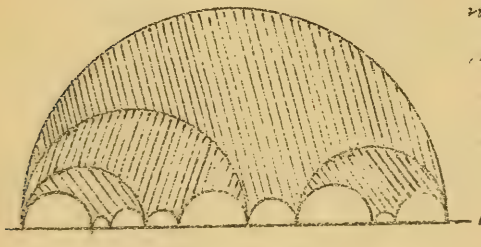
Unser Ergebnis ist daher dieses:

„Die Paralleleinteilung und die ihr zugehörige Formel $z' = z + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2$ kommen functionentheoretisch zur Geltung in der Theorie der doppelt periodischen Funktionen."

Nun wollen wir dieselbe Betrachtung in Bezug auf die hyperbolische Ebene vornehmen. Wir denken uns dementsprechend, es sei die hyperbolische Ebene in eine unendliche Zahl kongruenter Polygone zerlegt. Wählen wir etwa die Einteilung der Halbebene in Vierecke, wie sie von Dyck l. c gegeben wird, (wir müssen die Dyck'sche Figur natürlich noch einer Inversion

unterwerfen), so haben wir uns zu denken, daß die ganze Halbebene von lauter solchen Vierecken, die im Sinne der hyperbolischen Geometrie kongruent sind, der Art überdeckt ist, daß jeder begrenzende Halbkreis des einen Vierecks zugleich das benachbarte Viereck umschließt. Es entsteht so eine mosaikartige Zerlegung der Ebene, unserem Auge wird es erscheinen, als würden die Vierecke kleiner und kleiner, je näher sie an den Rand gepreßt sind.

Fig. 71.



Wenn ich dann frage, durch welche analytische Substitution wird ein erstes Viereck, über welches die Variable z läuft, in ein anderes Viereck übergehen, über welches die Variable z' läuft, so geschieht dies eben durch eine Bewegung der hyperbolischen Ebene, die analytisch ausgedrückt ist durch $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, gerade so wie wir vorhin die Beziehung $z' = z + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2$ aufgestellt hatten, um den Uebergang vom ersten Parallelogramm zu irgend einem anderen darzustellen. Da wir nun von einem ersten Viereck zu einem beliebigen anderen in so vielen Vierecken übergehen können, so werden wir zweckmäßig dem Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ den Index i geben, wo i jeden Werth von

1 bis ∞ bezeichnen möge. Wir können dann zusammenfassend sagen:

„Der Uebergang von einem Vierecke zu der Gesammtheit aller anderen wird analytisch durch eine unendliche Reihe solcher linearer Substitutionen vorgestellt werden: $z' = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$, wo die $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ reelle Zahlen von der Determinante $\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i = 1$ sind.

Man würde vielleicht jetzt erwarten, daß wir ein solches unendliches System der Substitutionen mitteilen; doch würde dies uns zu weit führen, da wir diese funktionentheoretischen Fragen hier augenblicklich nur anzudeuten beabsichtigten. Wir müssen uns daher damit begnügen zu wissen, daß es solche Substitutionssysteme in ausserordentlich großer Zahl giebt.

Doch wenn wir dies voraussetzen, so bringt uns die Betrachtung unserer Figur und der zugehörigen Substitution auf den Gedanken:

Wird es möglich sein, entsprechend dem, was wir bei den doppelt periodischen Funktionen gesehen haben, solche eindeutige Funktionen $f(z)$ aufzustellen, daß dieselben im ersten unserer Bereiche genau denselben Verlauf nehmen, wie in all' den anderen, daß also $f\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = f(z)$ wird für jeden beliebigen i?

Wir werden solche Funktionen mit ∞ vielen reellen

Substitutionen in sich geradezu als eine Verallgemeinerung der doppelt periodischen Funktionen ansehen können. —

Damit haben wir diejenige Fragestellung, mit welcher Poincaré zuerst im Jahre 1881 in den Comptes Rendus begann, und welche jetzt, darf man wohl sagen, ziemlich im Mittelpunkt des neueren funktionentheoretischen Interesses steht. Diese Funktionen nennt Poincaré zu Ehren von Fuchs „Fonctions Fuchsiennes." Gegen diese Benennung zu Ehren eines anderen Mathematikers, der allerdings in angrenzenden Gebieten gearbeitet hat, habe ich einmal Widerspruch erheben zu müssen geglaubt und zwar in der Schlußbemerkung zu den Untersuchungen von Poincaré, die im 19. Bde. der Math. Annalen abgedruckt sind. Wir hier in Göttingen, Herr Prof. Schwarz und ich, sind eben der Ansicht, solche Personalbezeichnungen, zumal wenn sie eine schiefe Ansicht von dem relativen Werte der Verdienste verschiedener Mathematiker geben können, doch lieber zu vermeiden. Ich habe bislang diese Funktionen als „eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich" bezeichnet. Ich bringe jetzt zwecks kürzerer Bezeichnung das Wort „ automorphe Funktion " in Vorschlag, speciell „ reell automorphe Funktionen ", da die

Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reell sind. Man könnte sich ja auch Funktionen denken, — und wir werden gleich noch hiervon sprechen. —, die unendlich viele linear gebrochene Substitutionen mit komplexen Parametern gestatten. *) Diese würden wir dann etwa „allgemein automorphe Funktionen" nennen.

Wir können dann die Bedeutung der nicht-euklidischen Geometrie in der Funktionentheorie kurz so charakterisieren:

Das geometrische Studium der hyperbolischen Ebene führt direct zur Theorie der reell automorphen Funktionen

Nun wollen wir noch versuchen, eine Erklärung zu geben, wie es sich mit der Raumgeometrie und den allgemein automorphen Funktionen verhält. Wir können an dieser Stelle natürlich nur in groben Zügen Andeutungen geben, ohne darauf Anspruch zu machen, volle Klarheit verschaffen zu wollen. Wir denken uns im Raume etwa eine Kugel, welche wir als absolutes Gebilde bei der Definition der hyperbolischen Maafsbestimmung wählen. Das Innere dieser Kugel haben wir dann in lauter kongruente Polyeder zu zerlegen, die im Sinne der Cayley'schen Maafsbestimmung

*) Das sind Poincaré's fonctions Kleinéennes".

kongruent sind und in ihrer Gesammtheit das Innere der Kugel gerade ausfüllen. Wenn man dann auf der Kugel $x + iy = z$ setzt und die Bewegungen im Sinne Cayleys in Betracht zieht, bei denen unsere Polyeder unter einander vertauscht werden, während die Kugel dabei natürlich in sich selbst übergeht, so kommt man zu der Theorie der allgemein automorphen Functionen, in Beziehung auf welche die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der linear gebrochenen Substitution komplex sind.

Auf Grund dieser Betrachtungen können wir nun auch genau bezeichnen, womit wir im nächsten Semester in der Vorlesung uns beschäftigen werden. Es ist in der That seit langen Jahren mein Wunsch, die automorphen Functionen hier in Göttingen in gleicher Weise zur Geltung zu bringen, wie ich in den letzten Semestern die hyperelliptischen und Abelschen Funktionen behandelt habe. Für die Theorie der automorphen Funktionen die allgemeine Grundlage zu geben, eben das soll nun im nächsten Semester unsere Aufgabe sein, woran sich dann von selbst eine längere Reihe von Specialvorlesungen schließen wird.

Diese Grundlage nun gewinne ich, was die Fortsetzung dieser Vorlesung über Nicht-Euklidische Geometrie angeht, in der Art, daß ich in dem besprochenen Sinne das allgemeine Problem der Ebenen- und Raumteilung

in kongruente Parcellen untersuche. Wir werden da also in analoger Weise in die Theorie der automorphen Funktionen eindringen, wie wenn man die Theorie der elliptischen Funktionen von der Parallelteilung der Ebene ausgehend behandelt.

Nun führt aber zu der Theorie der elliptischen oder doppeltperiodischen Funktionen doch noch ein anderer Weg als durch die Gebietseinteilung der Ebene, nämlich durch die elliptischen Integrale, von denen jene die Umkehrfunktionen darstellen. Ja, wenn man entscheiden sollte, welchem Wege als dem besseren von beiden der Vorzug einzuräumen wäre, so würde dies wohl nicht so leicht zu sagen sein. Doch ist es auch gar nicht nötig, eine solche Entscheidung zu treffen; vielmehr ist es unbedingt zu empfehlen, beide Methoden neben einander zu behandeln. Dementsprechend aber gibt es nun auch zu den automorphen Funktionen noch einen anderen Eingang als von der Zerlegung der hyperbolischen Ebene oder des hyperbolischen Raumes aus, wenn man nämlich auch hier, wenn $f(z)$ eine automorphe Funktion ist, umgekehrt z als eine Funktion von f betrachtet. Es zeigt sich, daß dies durch Vermittelung gewisser linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung geschieht. So ergiebt sich ein zweiter Eingang in die Theorie der automorphen Funktionen, dies ist der Eingang von der

Theorie der Differentialgleichungen, speciell der linearen Differentialgleichungen aus. —

Es wird so auch verständlich sein, warum ich als Hauptvorlesung des nächsten Semesters die Theorie der Differentialgleichungen angekündigt habe. Ich beabsichtige da eben, nach einer Darlegung der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen bis zu den automorphen Funktionen vorzudringen. Beide Vorlesungen zusammen sollen dann die in Aussicht genommene „Grundlage" geben, auf der spätere Semester weiter zu arbeiten haben. —

Doch kehren wir nun nach diesem Excurs zu unseren Betrachtungen der zweiten Periode in der Entwicklung der nicht-euklidischen Geometrie zurück. Wir hatten bereits die Arbeiten von Riemann und Beltrami auf diesem Gebiete besprochen, wir gehen nun dazu über, von den Arbeiten von Helmholtz zu berichten. Wir wollen zunächst einige allgemeine Bemerkungen vorausschicken. Helmholtz ist nicht Mathematiker von Beruf, er ist Physiker, Physiologe. Daher treten uns bei ihm die Fragen, mit denen wir uns hier beschäftigen, unter einen allgemeineren Gesichtspunkte entgegen. So z. B. behandelt Helmholtz die erkenntnistheoretische Frage, ob wir überhaupt berechtigt sind, derartige Betrachtungen, wie wir sie hier

angestellt haben, auf unseren wirklichen Raum zu übertragen, dann auch die physiologische Frage, wie das Sehen mit unseren beiden Augen zu Stande kommt, wie es sich gestalten müßte, wenn wir nicht die euklidische Geometrie in der Aussenwelt vor uns haben u.s.w. Es sei an dieser Stelle erinnert an den Vortrag von Helmholtz: „Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome," der im Heft 3. der populär wissenschaftlichen Vorträge von Helmholtz (1876) abgedruckt ist. Es ist zu empfehlen von diesem Vortrag Kenntnis zu nehmen.

Mit dieser nicht mathematischen Eigenschaft von Helmholtz hängt es dann auch zusammen, daß er den mathematischen Teil seiner Betrachtungen nicht mit der Gründlichkeit behandelt und durcharbeitet, wie man es bei einem Mathematiker von Fach fordern wird. Es findet sich daher diese oder jene mathematische Incorrektheit. So übersieht Helmholtz zu Anfang seiner Untersuchungen, als er mit der Litteratur des Gegenstandes nur sehr unvollkommen vertraut war, z.B. die Möglichkeit der Annahme eines negativen Krümmungsmaaßes in einer reellen Mannigfaltigkeit, er hat vielmehr herausbekommen (indem er ausschließlich an die beg. Hülfskugel dachte), daß negatives Krümmungsmaaß nur bei imaginären Maaßbestimmungen

möglich sei. So steht er vor der Alternative: entweder Euklid oder positives Krümmungsmaass. Dies ist besonders deswegen interessant, weil ja früher, in der ersten Periode der Entwicklung der nicht-euklidischen Geometrie, die Frage gerade lautete: entweder Euklid oder negatives Krümmungsmaass. Übrigens hat Helmholtz, von Beltrami aufmerksam gemacht, seinen Irrthum ausdrücklich zugegeben und dies auch in einer Note zu seinen Schriften ausgesprochen. Einen anderen Punkt der Helmholtz'schen Theorie, der Bedenken erregt (die Forderung der sogen. Monodromie) werden wir unten besprechen.

Wir werden jetzt über die Schriften von Helmholtz des Näheren zu berichten haben, und zwar über die beiden Aufsätze, die sich im II. Bde. seiner gesammelten Abhandlungen pag. 610 ff. finden. Der erste ist ein Vortrag, den Helmholtz im Jahre 1868 in Heidelberg in der Versammlung Deutscher Naturforscher und Aerzte gehalten hat, derselbe ist zuerst in den Berichten dieser Gesellschaft vom gleichen Jahre veröffentlicht unter der Überschrift: „Über die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie." Der zweite Aufsatz ist eine weitere Ausführung dieses Vortrages, die zuerst 1868 in den

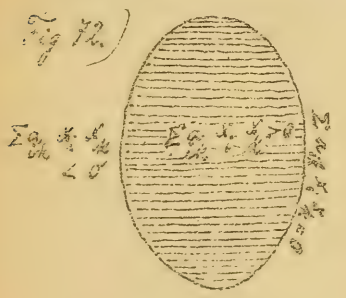
Göttinger Nachrichten erschienen ist. Er führt den Titel: „Über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen"

Wir werden am besten uns darauf beschränken über das Neue in diesen Arbeiten in durchaus freier Weise zu referieren. — Riemann ging bekanntlich in seinem Vortrage davon aus, daß er als Definition des Bogenelementes aufstellte: $ds = \sqrt{\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k}$. Bei unserer ersten Erwähnung dieser Formel bei Riemann haben wir einen Punkt jedoch nicht betont. Es soll nämlich der Ausdruck unter der Quadratwurzel ein definiter (und zwar ein positiv definiter), nicht ein indefiniter sein. Was heisst es nun, ein Ausdruck ist definit resp. indefinit? Wir wollen einmal $n = 3$ setzen und den Ausdruck $\Sigma a_{ik}\, x_i\, x_k$, in dem dann die Indices i und k die Werte 1, 2, 3 haben, näher betrachten. Setzen wir diesen gleich 0 und betrachten x_i, x_k als trimetrische Coordinaten, so stellt die Gl. $\Sigma a_{ik}\, x_i\, x_k = 0$ einen Kegelschnitt dar, der nulltheilig und eintheilig sein kann. Wenn er eintheilig ist, so wird vielleicht für die Punkte im Innern desselben der Ausdruck $\Sigma a_{ik}\, x_i\, x_k > 0$, für die Punkte ausserhalb des Kegelschnittes dagegen < 0 sein, oder auch umgekehrt. Es giebt jedenfalls also in der Ebene durch

den Kegelschnitt getrennte Gebiete, in deren einem der Ausdruck $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ stets positiv, im anderen stets negativ ist. (Fig. 72.). In diesem Falle nennen wir den Ausdruck $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ einen indefiniten.

Wenn aber der durch $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ dargestellte Kegelschnitt nulltheilig ist, so folgt, daß in der ganzen Ebene unser Ausdruck stets ein und dasselbe Vorzeichen zeigt. Wir nennen daher den Ausdruck $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ einen definiten und zwar, je nachdem das in Rede stehende Vorzeichen desselben stets positiv oder stets negativ ist, einen positiv resp. negativ definiten.

(Fig 72.)



Was wir so in geometrischer Weise von der Form $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ ausgesagt haben, gilt unverändert auch für den quadratischen Ausdruck $\Sigma a_{ik} dx_i dx_k$.

Derselbe heisst definit, wenn er für kein reelles Werthesystem dx verschwindet und also für alle reellen Werthsysteme dx gleiches Vorzeichen hat."

Nun findet bei Riemann die Voraussetzung statt, daß $\Sigma a_{ik} dx_i dx_k$ im der Formel des Bogenelementes ein positiv definiten Ausdruck beinhalt. Es würde nämlich andernfalls reelle Fortschreitungsrichtungen geben, für die ds Null oder imaginär

würde, was natürlich nicht der Fall sein soll.

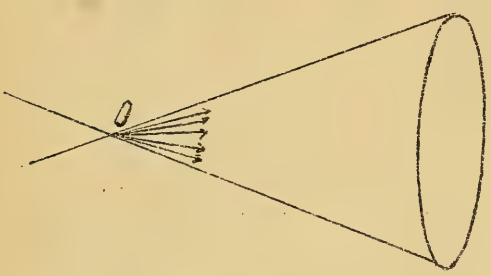
Doch wir wollen uns einmal hineindenken, was es heisst für einen beliebigen in Betracht gezogenen Punkt einer Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung, wenn $\sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ ein indefiniter Ausdruck ist. Da wir unsere Aufmerksamkeit auf die Umgebung nur eines einzelnen Punktes richten, so werden wir dabei die a_{ik} als konstant ansehen dürfen. Es gibt also dann reelle Fortschreitungsrichtungen von unserem Punkte aus, für welche der Ausdruck gleich 0 wird.

Wenn wir uns nun fragen, was diese Fortschreitungsrichtungen für eine Gestalt bilden, so brauchen wir einfach nur die Gl. $\sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k = 0$ zu interpretieren.

Wir müssen in derselben die dx als Coordinaten der von unserem Punkte auslaufenden Fortschreitungsrichtungen gelten lassen, mit denen wir gerade so operieren, wie sonst etwa mit den Coordinaten x der von einem Punkte auslaufenden Strahlen, nämlich so, dass wir nur die Anfangselemente solcher Strahlen in Betracht zu ziehen haben während man in der projectiven Geometrie die Strahlen in ihrer ganzen Ausdehnung berücksichtigt. Nun wissen wir, in Strahlencoordinaten x stellt $\sum a_{ik}\, x_i\, x_k$ einen Kegel zweiter Ordnung dar, der von dem Punkte aus sich projiciert. Es umfasst daher $\sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k = 0$ alle die Fortschrei-

fungsrichtungen, die durch die Anfangselemente der Strahlen dieses Kegels gegeben werden. Wenn es sich nun um einen indefiniten Ausdruck handelt, so ist der Kegel dieser Fortschreitungsrichtungen einteilig *) Die von unserem Punkte auslaufenden

Fig. 11



Bogenelemente, die auf diesen reellen Kegel fallen, sind gleich 0; die Bogenelemente im Inneren des Kegels haben etwa eine reelle Länge, die ausserhalb eine imaginäre Länge oder umgekehrt. Wenn es nun möglich sein soll, den mit indefiniten Bogenelement versehenen Raum ebenso zu bewegen, wie wir es vom gewöhnlichen Raum gewöhnt sind, insbesondere ihn um einen festgehaltenen Punkt zu drehen, was werden wir dann bei einer Drehung um den Punkt O schließen können? Der einteilige Kegel $\Sigma a_{ik} dx_i dx_k = 0$ muß hierbei offenbar in sich selbst übergehen.

*) In besonderen Fällen könnte der indefinite Ausdruck natürlich auch ein Paar reeller oder imaginärer ebener Strahlbüschel vorstellen; die Ueberlegungen des Textes bleiben dabei in der Hauptsache unverändert.

denn die Bogenelemente, die reell sind, können doch nicht in solche übergehen, die imaginär sind. Auch müssen Bogenelemente von der Länge Null immer wieder Bogenelemente von der Länge Null liefern. Wie werden sich nun im besonderen diese Drehungen um den Punkt O darstellen? Ist eine beliebige Fortschreitungsrichtung vom Punkte O aus gegeben durch das Verhältnis $dx_1 : dx_2 : dx_3$, so wird aus derselben bei der Drehung etwa die durch das Verhältnis $dx_1' : dx_2' : dx_3'$ bestimmte Fortschreitungsrichtung werden. Wie hängen nun die x' zu den dx' zusammen? Mögen ganz allgemein die x' zu den x bei einer jeden Bewegung in einer mittelst analytischer Formeln ausgedrückten Beziehung stehen, die wir uns als durchaus differentiierbar denken. Wenn wir nun aber zu den Differentialen übergehen, so werden wir ohne Zweifel das Formelsystem erhalten:

$$dx_1' = a_{11}\,dx_1 + a_{12}\,dx_2 + a_{13}\,dx_3,$$
$$dx_2' = a_{21}\,dx_1 + a_{22}\,dx_2 + a_{23}\,dx_3,$$
$$dx_3' = a_{31}\,dx_1 + a_{32}\,dx_2 + a_{33}\,dx_3.$$

Dies hiermit aufgestellte Prinzip ist natürlich völlig richtig. Sein allgemeiner Inhalt drückt sich in Worten aus:

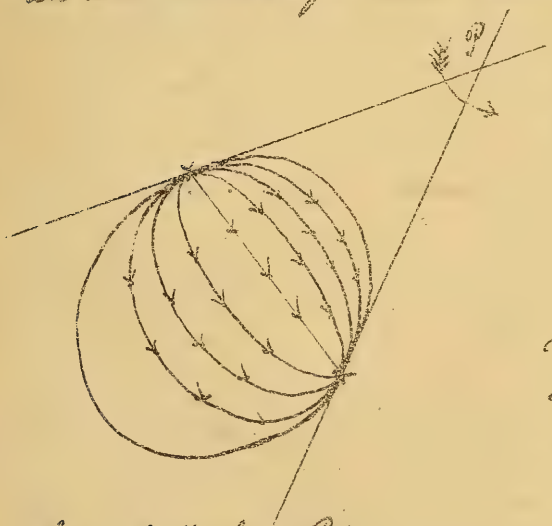
Wenn man sich auf die Differentiale und ihre Transformationen beschränkt, dann kommt man

den Drehungen entsprechend sicher auf lineare Substitutionen, d. h. auf Formeln, die ganz denen ähnlich sind, die wir in der projectiven Geometrie kennen, nur daß man dx schreibt wo sonst x steht."

Wir sehen jetzt auch sogleich, wie die Verhältnisse beschaffen sind im unserem Falle, wo $\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ ein indefiniter Ausdruck ist und wir eine Drehung um unseren Punkt O vornehmen. Wir haben die dx dann so zu transformieren, daß der einfeilige Kegel $\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k = 0$ bei diesen linearen Substitutionen in sich selbst übergeht.*) Dies ist aber ganz die nämliche Aufgabe, die uns von der Bewegung der hyperbolischen Ebene her bekannt ist. Dieselbe ist jetzt nur von der Ebene auf ein Strahlenbündel übertragen. Denn ob wir statt $dx_i : dx_k$ einsetzen $x_i : x_k$ und dann die vollständigen Strahlen in Betracht ziehen, die durch O laufen, oder ob wir nur die Anfangselemente derselben berücksichtigen, indem wir $dx_i : dx_k$ beibehalten, ist für die jetzt in Betracht kommenden Schlüsse ganz gleich. Wir wollen nun

*) Dies ist natürlich genau so, wenn $\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ definit ist und also $\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k = 0$ einen nulliteiligen Kegel vorstellt; nur hat es keinen Zweck, im Texte die betreffenden Verhältnisse weiter zu verfolgen.

diese Verhältnisse nach einer Seite hin weiter verfolgen. Wir hatten drei Arten von Drehungen in der hyperbolischen Ebene betrachtet. Bei den Drehungen erster Art lag der feste Drehpunkt im Innern des Kegelschnittes, bei den Drehungen zweiter Art auf dem Kegelschnitt, bei den Drehungen dritter Art außerhalb des Kegelschnittes. Nur die Drehungen erster Art führen nach Durchlaufung einer endlichen Strecke zur Anfangslage zurück. Im zweiten und dritten Fall dagegen ist die Drehung aperiodisch. Es sei durch die Figur 73. an die Verhältnisse im dritten Fall erinnert, mit dem



Punkte P ist auch die Polare desselben fest, die Tangenten von P an den Kegelschnitt bilden mit jedem anderen Strahl durch P so große Winkel, wodurch die Aperiodicität der Drehung um P bedingt ist.

Ähnlich wie in der hyperbolischen Ebene liegt die Sache übrigens auch in der parabolischen Ebene. Auch hier sind die Drehungen aperiodisch, sobald der Drehungspunkt nicht mehr im Endlichen liegt.

Hier werden wir nun auf den Kegel über-
tragen; wir können dann sagen:

Wenn das Bogenelement durch eine indefinite quadratische Form gegeben wird, dann wird es Drehungen um einen beliebigen Punkt geben, welche nicht nach einer endlichen Weglänge zur Anfangs-lage zurückführen.*)

Man wird daher die Forderung eines definiten quadratischen Ausdrucks für das Quadrat des Bogenelements auch dahin präcisieren können:

Es soll jede Drehung nach einer endlichen Weglänge in die ursprüngliche Lage zurückführen.

Jetzt haben wir alle Praemissen, um die Helmholtz'schen Schriften zu verstehen und zu kritisieren. (Es ist nämlich, wie wir schon andeuteten, eine unrichtige Behauptung in denselben ausgesprochen, die wir zu berichtigen haben.) Wir gehen nun auf die Aufsätze selbst ein:

---

*) Wir haben im Texte so argumentiert, als stelle $\Sigma a_{ik} dx_i dx_k$, wenn indefinit $= 0$ gesetzt durchaus einen einteiligen eigentlichen Kegel zweiter Ordnung dar. Es kann sich aber auch um ein Paar reeller oder imaginärer Strahlbüschel oder um ein doppelt zählendes Büschel handeln. In allen Fällen bleibt das Resultat des Textes bestehen, wie wir hier nicht ausführlich nachweisen.

Helmholtz sagt nicht die Annahme eines bestimmten Ausdruckes für das Bogenelement voraus, sondern er sucht vielmehr die hierauf bezügliche von Riemann gemachte Annahme zu begründen. In diesem Sinne also geht er einen Schritt weiter als Riemann. Die Thatsache, auf der er fusst, ist die, daß es ∞^6 Bewegungen in unserem Raume giebt, bei denen die starren Körper ihre geometrischen Eigenschaften behaupten. Diese Bewegungen, sagt er, werden sich jedenfalls so analytisch ausdrücken, daß die neuen Coordinaten x' der Punkte mit den ursprünglichen durch 3 bestimmte Gleichungen zusammenhängen:

$$x_1' = \varphi(x_1\ x_2\ x_3\ ;\ a_1 \ldots\ldots a_6)$$
$$x_2' = \psi(x_1\ x_2\ x_3\ ;\ a_1 \ldots\ldots a_6)$$
$$x_3' = \chi(x_1\ x_2\ x_3\ ;\ a_1 \ldots\ldots a_6)$$ wo $a_1 \ldots\ldots a_6$

beliebige Parameter sind, entsprechend den 6fach ∞ vielen möglichen Bewegungen. Von diesen 6fach ∞ vielen Bewegungen nun (die als ebensoviele Transformationen der Variabeln $x_1\ x_2\ x_3$ erscheinen) wissen wir jedenfalls noch eine Eigenschaft, nämlich, daß aus den Coordinaten $x_1\ x_2\ x_3$; $y_1\ y_2\ y_3$ irgend zweier Punkte sich eine bestimmte Größe, die Entfernung derselben, berechnen läßt, die bei sämmtlichen möglichen Bewegungen ungeändert bleibt. Es giebt also eine Funktion:

$\mathcal{E} = f(x_1 x_2 x_3 ; y_1 y_2 y_3)$, die ungeändert bleibt, wenn ich die x sowie die y den oben aufgestellten Transformationen gleichzeitig unterwerfe.*)

Nun stellt sich Helmholtz die Aufgabe: alle 6 fach ∞ vielen Aggregate von Transformationen dreier Variabeler zu bestimmen, welche die Eigenschaft haben, eine solche unveränderliche Größe $\mathcal{E}$ zuzulassen. Wir wollen sofort das Theorem aufstellen, zu dem wir gelangen. Sei es uns gestattet hierbei das Wort „Gruppe" einzuführen zur Bezeichnung für die 6fach unendliche Mannigfaltigkeit der Bewegungen.

Wir werden dann sagen:

„Wenn eine 6fach unendliche Gruppe von Transformationen im Gebiet von 3 Dimensionen vorliegt, welche die Eigenschaft hat, eine bestimmte Funktion zweier Punkte x und y unverändert zu lassen, und es hat ferner diese Gruppe von Bewegungen die Eigenschaft, daß jede einzelne ihr angehörige unendlich kleine Transformation, die einen Punkt festläßt (die also geometrisch eine Drehung um diesen Punkt vorstellt) nach einer endlichen Weglänge zur Anfangslage zurückführt, dann ist die Funktion $\mathcal{E}$ für 2 ∞ benachbarte Punkte durch die Quadratwurzel aus einem definiten Ausdruck $\sum a_{ik} dx_i dx_k$ gegeben."

*) Für die Coordinaten y lauten die entsprechenden Formeln dann: $y_1' = \varphi(y_1 y_2 y_3 ; a_1 \cdots a_6)$; $y_2' = \psi(y_1 y_2 y_3 ; a_1 \cdots a_6)$; $y_3' = \chi(y_1 y_2 y_3 ; a_1 \cdots a_6)$.

Hiermit hätten wir dann den Riemann'schen Ausgangspunkt. Dieser Satz wäre also das eigentliche Resultat der Helmholtz'schen Arbeit. Nun wollen wir sehen, wie Helmholtz dies Resultat herleitet. Wir werden übrigens nur im Grossen und Ganzen die Betrachtungen von Helmholtz wiedergeben und zwar, wie wir schon sagten, in freier Weise.

Wir betrachten einmal die Funktion E für zwei Nachbarpunkte, von denen wir dann einen als fest annehmen.

Es wird dann:
$E(x, x+dx) = F(dx_1, dx_2, dx_3)$ d. h. gleich einem homogenen Ausdruck in den dx_1, dx_2, dx_3 werden Denken wir uns den Punkt x fest, so wird diese Funktion F offenbar nur von dx_1, dx_2, dx_3 abhängen, also ein Differentialausdruck mit constanten Coefficienten sein. Diese Funktion soll nun bei all' den Bewegungen unserer Gruppe unverändert sein, die den Punkt x festlassen. Nun giebt es allgemein 6 fach ∞ viele Bewegungen. Halten wir aber einen Punkt x fest, so wird es nur noch ∞^3 Bewegungen geben. Gut, setzen wir nun $F(dx_1, dx_2, dx_3) = 0$, so stellt diese Gl. einen gewissen Kegel von Fortschreitungsrichtungen dar, der sich von unserem festen Punkte aus in den Raum erstreckt, und dieser Kegel muss dann bei den 3 fach ∞ vielen möglichen

Bewegungen in sich übergehen. Wie nun aber auch analytisch diese möglichen Bewegungen als Beziehungen der neuen x' mit den alten x ausgedrückt sein mögen, jedenfalls werden wir wie bereits gesagt, wenn wir zu den Differentialen übergehen, die Gleichung aufstellen dürfen:

$$dx_1' = k_{11}\, dx_1 + k_{12}\, dx_2 + k_{13}\, dx_3,$$
$$dx_2' = k_{21}\, dx_1 + k_{22}\, dx_2 + k_{23}\, dx_3,$$
$$dx_3' = k_{31}\, dx_1 + k_{32}\, dx_2 + k_{33}\, dx_3,$$ wobei

natürlich die Größen k noch von den 3 willkürlichen Parametern abhängen, damit eben dreifach unendlich viele Bewegungen sich ergeben.

Zusammenfassend werden wir dann sagen:

„Für die Fortschreitungsrichtungen dx stellen sich die dreifach ∞ vielen Bewegungen als ebensoviele lineare Substitutionen dar, und unser Kegel $F(dx_1, dx_2, dx_3) = 0$ muß also die Eigenschaft haben, durch dreifach unendlich viele lineare Substitutionen in sich überzugehen."

Dadurch ist nun unsere weitere Betrachtung zu einer Frage der projektiven Geometrie geworden.

Denn:

„Indem wir jetzt die $dx_1\, dx_2\, dx_3$ durch gewöhnliche trimetrische Coordinaten $x_1\, x_2\, x_3$ einen Augenblick ersetzt denken, haben wir die Aufgabe vor uns, alle Curven $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ in der Ebene zu bestimmen, welche durch dreifach ∞ viele Collineationen in sich

übergehen, und die projektive Geometrie zeigt *), daß dies nur die Kegelschnitte bezw. ihre Ausartungen sind."

Jetzt wissen wir aber, daß $F = 0$ keine reellen Elemente enthalten darf, denn sonst würde es Drehungen in unserem Raume geben, die nicht nach endlicher Weglänge auf die Anfangslage zurückführen. Es sind dies, allgemein zu reden, **) die Drehungen, die auf ein solches reelles Element hinführen. (vergl. Fig. 73.) Also handelt es sich bei $F = 0$ um einen solchen Kegel bezw. eine solche Ausartung eines Kegels, welche kein reelles Element enthält. Dies aber ist notwendig ein eigentlicher, nulltheiliger Kegel. Es muß sodann $\overline{F} = 0$ dasselbe sein, wie $\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k = 0$, unter der linken Seite einen definiten Ausdruck verstanden. Da nun endlich noch die Entfernung zweier unendlich benachbarter Punkte doch offenbar von derselben Ordnung unendlich klein ist, wie die Zuwachse dx der Coordinaten, so muß für $\overline{F}$ schließlich gesetzt werden: $\sqrt{\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k}$. Wir haben so die Formel $ds = \sqrt{\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k}$ abgeleitet, welche Riemann zum

*) Wir drücken uns hier im Texte etwas ungenau aus. in der That müßten wir längere Erläuterungen geben, um alle Möglichkeiten genau zu besprechen.

**) d.h. auch in den Fällen, wo der betr. Kegel in ein Paar reeller oder imaginärer ebener Büschel ausgeartet sein sollte.

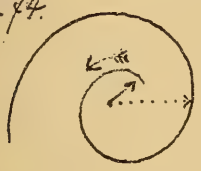
Ausgangspunkt seiner Betrachtung gemacht hat.
Wir haben uns dabei freilich auf den Fall von 3 Dimensionen beschränkt. Aber das ist nur im Interesse der bequemeren Darstellungsweise geschehen. Die Betrachtungen lassen sich ohne nennenswerte Schwierigkeit auf n Dimensionen übertragen.

Wir haben dem Referat über Helmholtz' Arbeiten nur noch einen kleinen Punkt hinzuzufügen. Es bezieht sich auf die Erörterung der Möglichkeiten, die denkbar sind, wenn man die Forderung fallen läßt, daß jede Drehung um eine Axe nach einer endlichen Weglänge zur ursprünglichen Anfangslage zurückführt. Wir hatten uns diesen Fall bereits durch die Figur in der hyperbolischen Ebene klar gemacht. (vgl. Fig. 73.) Auch Helmholtz giebt dieses Bild; doch führt er noch eine zweite Möglichkeit an, in die er jedoch nicht sich genirt hat. Er denkt sich nämlich, daß möglicherweise nach einer einmaligen Umdrehung die Anfangsrichtungen zwar dieselben sind, wie vorher, daß aber die Endpunkte der Bogenelemente, die vom festen Drehpunkt ausgehen, nicht wieder mit den ursprünglichen zusammenfallen, sondern daß dieselben etwa eine Art Spirallinie beschreiben. So spricht er hierbei die Idee aus, der Raum möge nicht monodrom sein, d.h. die Abstände von der Drehungsaxe müssen bei einer vollen Umdrehung um die Drehungsaxe

möglicherweise mit einer von 1 verschiedenen Konstanten multiplicirt werden.*)

Nach den Untersuchungen von Lie aber in den Leipziger Berichten 1886 ist diese Befürchtung gegenstandslos. Die Bedeutung der hiermit besprochenen

Fig. 74.



Helmholtz'schen Arbeiten beruht aber keineswegs nur in denmathematischen Betrachtungen und Resultaten, sondern darin, daß dieselben weit mehr von einem größeren Publikum gelesen wurden, als jede andere Schrift auf diesem Gebiet. So knüpft denn auch die populäre Discussion im Kreise der Nicht-Mathematiker, der philosophischen Forscher, der Lehrer, die für Elementargeometrie Sinn und Interesse haben, ohne doch gelernte Mathematiker zu sein, fast ausschließlich an die Arbeiten von Helmholtz an. Wir wollen bei dieser Gelegenheit die genannten Gelehrten doch in 4 Gruppen teilen:

1. Die ersten sind diejenigen, die streng auf dem Kantischen Standpunkt beharren. Wir können sie die Orthodoxen nennen. Unter diesen ragt z. B. Düring in Berlin hervor, auch auf anderen Gebieten einer der erbittersten Gegner von Helmholtz. Während letzterer dafür eintritt, daß die Axiome der Geometrie wesentlich

*) Diese Helmholtz'sche Ausdrucksweise ist der Funktionentheorie entnommen.

unter der Mitwirkung der Erfahrungen aufgestellt sind sagt Düring: Das ganze System der nicht euklidischen Geometrie zeigt eine höchst verderbliche Auffassung; es handelt sich dabei um eine Untergrabung aller Geometrie; für den richtig denkenden Mathematiker steht es von vornherein fest, dass man durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden zu dieser nur eine einzige Parallele ziehen kann. Die Zahl der Forscher, die diesen Ansichten huldigen, ist gar nicht gering. Es sind vor allem solche Männer, die sich im frühen Alter an die Anschauungen der Euklidischen Geometrie ausschliesslich gewöhnt haben, und nun im späteren Alter nicht mehr Elasticität genug besitzen, um sich in die neuen Ideen der nicht-euklidischen Geometrie hineinzudenken. Diese wissen dann genau, dass die ganze Theorie Unsinn ist, ohne sie darum notwendigerweise überhaupt des Näheren zu kennen. *)

2.) Die zweite Klasse bilden die Skeptiker. Diese glauben von Grund ihres Herzens aus nicht an die nicht-euklidische Geometrie. Sie können es sich nicht vorstellen, dass man in eine Maassgeometrie sich hineindenken könne, die so sehr von der gewöhnlichen Anschauungsweise verschiedene Resultate aufstellt und doch der

---

* Übrigens bekennen sich auch hervorragende Mathematiker zu derselben Ansicht; auch Cayley ist geneigt, streng an den Euklidischen Axiomen festzuhalten.

gewöhnlichen geometrischen Anschauung, was kleinere Teile des Raumes angeht, durchaus Rechnung trägt. Sie können aber auch die Gründe nicht entkräften, welche gegen die bisherigen Beweise des Parallelenaxioms sprechen, sie suchen daher immer nach neuen Beweisen. Dies ist wohl größtenteils die Ansicht der Gymnasiallehrer. Ich will erwähnen Beez aus Plauen, der eine Reihe von kleineren Abhandlungen hierüber geschrieben hat, die nicht ohne Interesse sind (in Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik). Bei einer Unterredung mit ihm (1881) gelang es mir nicht, seine Aufmerksamkeit auf das Cayley'sche Abbild der Nicht-Euklidischen Geometrie zu concentrieren; er wollte und konnte sich nicht an eine derartige vergleichende Betrachtung begnemen.

3. Drittens sind zu nennen die Receptiven. Dieselben suchen ihre Aufgabe darin, die Helmholtz'schen Schriften ausführlicher darzulegen, zu commentieren. Von diesen Männern giebt es unter den jüngeren Philosophen eine ganze Reihe. Es sei z. B. erinnert an Erdmann, (früher in Breslau, jetzt in Halle), der über die Axiome der Geometrie 1876 ein Buch geschrieben hat, worin er den Helmholtz'schen Standpunkt ausführlich auseinanderlegt und mit Kant und anderen vergleicht.

4. Doch fehlt es auch nicht an den Enthusiasten,

welche die Frage nicht so aufwerfen, wie wir es gethan haben, indem wir sagten, unserer Vorstellung wie unserer Erfahrung vom Raume wird mit der genügenden Genauigkeit ebensowohl durch die hyperbolische oder elliptische wie durch die parabolische Maassbestimmung entsprochen, wir entscheiden uns aber für die parabolische Hypothese, weil sie die einfachste ist, (wie man in der Physik auch unter gleichberechtigten Hypothesen immer die einfachste gelten läßt.) Vielmehr entscheiden sich diese Enthusiasten aus anderem Gründen. Hierher gehört Clifford und Zöllner (letzterer auch sonst ein Gegner von Helmholtz). Diese sprechen sich beide für die elliptische Geometrie aus, jeder aus besonderem Grunde. Zöllner, der metaphysische Neigungen hat, spricht die elliptische Geometrie an, weil die Ausdehnung des Raumes ins Unendliche hierbei umgangen wird, die man sich doch nicht vorstellen könne. Daher ist es richtig, die elliptische Geometrie, bei der der Raum in sich selbst zurücklauft, als die einzig mögliche anzusehen. Clifford als ein in der Schule der projektiven Geometrie gewachsener Mathematiker stellt gewisse ästhetische Principien voran. Er sagt: es giebt doch kein schöneres Gesetz als das der Dualität. Dies wird jedoch in der euklidischen Geometrie verletzt, indem die Maassverhältnisse im

Punkte denen der Strahlen, den Winkeln, nicht entsprechen. Aber auch in der hyperbolischen Geometrie herrscht das Gesetz der Dualität nicht, (sofern wir nicht etwa durchweg complexe Elemente in die Betrachtung aufnehmen wollen.). Während in ihr z. B. alle Punkte einen gewissen reellen Abstand von einander haben (natürlich beschränken wir uns auf das Innere des fundamentalen Kegelschnitts), können wir ja Linien finden, deren Winkelabstand 0 oder imaginär ist u. s. w.

Wenn wir aber einen nullteiligen Kegelschnitt als fundamentales Gebilde annehmen, also die elliptische Geometrie ins Auge fassen, dann gelten alle Sätze in dualistischer Weise genau so mit den Punkten wie mit den geraden Linien. Deswegen verdient die elliptische Geometrie den Vorzug.

Wir sehen, wie diese verschiedenen Betrachtungsweisen und Anschauungen sich in buntester Abwechselung neben einander stellen. Eins aber wollen wir noch betonen: Clifford allein von den angeführten Männern kennt Nicht-Euklidische Geometrie von Grund aus; die anderen vier haben zwar davon reden hören und glauben daher die Berechtigung zu haben, mitreden zu dürfen, das eigentliche innere Wesen und die streng mathematische Behandlung der Nicht-Euklidischen Geometrie aber sind ihnen unbekannt geblieben. Ich schreibe hier

meinen Zuhörern keine besondere Ansicht als verpflichtend vor. Aber ich will auf das Dringendste empfehlen, vorerst gründlich zu studieren, um was es sich handelt, und dann erst ein eigenes Urteil zu gewinnen.

Wir kommen jetzt in unserem Referat zu der dritten Periode, die durch das Hinzutreten der projektiven Geometrie bedingt ist. Ich habe bisher ja immer Gelegenheit zu bemerken, dass die früheren Forscher die Abhandlung Cayley's nicht kannten. Wir wollen unsere Aufmerksamkeit darauf lenken, wie dies geschehen konnte. Es hängt dies mit dem allgemeinen Gange der Entwickelung unserer Wissenschaft zusammen. Nämlich man kann sagen bis etwa zum Jahre 1870 zieht sich durch das ganze 19. Jahrhundert eine Zweiteilung der geometrischen Wissenschaft. Monge steht an der Spitze der doppelten Wege der Forschung, aber seine Schüler und Nachfolger haben verschiedene Richtungen eingeschlagen und sind etwa 60 Jahre getrennt neben einander hergegangen. Etwas ungenau kann man die eine Richtung der Geometrie „die Geometrie des Maasses", die andere „die projektive Geometrie oder die Geometrie der Lage" nennen. Die Forscher, die sich mit der einen Theorie beschäftigten, hatten auf die Forscher des anderen Gebietes wenig oder gar keinen Einfluss und umgekehrt. In der That sind auch die Probleme, mit denen man sich beschäftigte,

verschiedenartig gewesen. Die Probleme, die in der Geometrie des Maasses hauptsächlich Gegenstand der Betrachtung waren, begreifen sich unter Anwendung der Differential- und Integralrechnung (Flächenkrümmung, u. s. w.). Unter den Männern, die sich damit beschäftigten, finden sich die besten Namen: Gauss selbst und alle die Vielen, die wir in den letzt vergangenen Stunden genannt haben. Auf der anderen Seite, in der Geometrie der Lage, hat man die allgemeine Theorie der Verwandtschaft der Figuren und namentlich die algebraischen Curven und Flächen behandelt. Es ist hier gleichfalls eine lange Reihe der Forscher zu nennen, von Poncelet her, der an der Spitze steht, wir haben eine grosse Zahl derselben vor Weihnachten schon namhaft gemacht.

Man kann auch fragen, welche Interessentenkreise hier und dort vorhanden sein mögen, d. h. in welchen Anwendungen hier und dort die verschiedenen Zweige geometrischer Forschung zur Geltung gekommen sind. Wir können sagen: in allen den Gebieten, in welchen es auf genaue Messungen ankommt, wird der Geometrie des Maasses der Vorzug gegeben sein, so besonders in der Astronomie, Geodäsie, mathematischen Physik. Überall da aber, wo man zu zeichnen hat, ist die Geometrie der Lage wichtig gewesen. Hierher gehören die darstellenden Künste im allgemeinen Sinne, besonders darstellende Geometrie, auch die Lehre von der Reliefperspektive

wäre hier zu nennen). Ferner ist von den Ingenieuren auf Grund der projektiven Geometrie noch eine ganz besondere Disciplin geschaffen. Es ist dies die „graphische Statik," eine Ausbildungsweise der Betrachtungen der Statik, bei denen man nicht rechnet, sondern zeichnet. Es gibt gewisse Aufgaben der Statik, bei denen sich die Zeichnung der rechnerischen Behandlung überlegen zeigt. Hierher gehört z. B. die Lehre von der Konstruktion der Brücken, Dachstühle u. s. w. Jeder Stab, aus denen die Brücke gebaut ist, muß einzeln betrachtet werden, eine große Anzahl solcher Stäbe befindet sich neben einander, es gilt ihre räumliche Verknüpfung immer vor Augen zu halten. Hier kommt man dann viel schneller zum Ziel, wenn man Zeichnungen anfertigt, als wenn man lange Rechnungen anstellt. Es sei an dieser Stelle an ein Wort Eiffels erinnert, das kürzlich durch die Zeitungen verbreitet war: er würde seinen Turm niemals haben konstruieren können, wenn er nicht in Zürich graphische Statik gelernt habe. Das bahnbrechende Werke über „graphische Statik" ist von Culmann in Zürich seiner Zeit verfasst worden. (1864.)

Unabhängig von dieser Verschiedenheit der Interessenkreise hat sich übrigens, kann man sagen, auch die mathematische Denkweise selbst in den 2 unterschiedenen Teilen der Geometrie nach verschiedenen Richtungen entwickelt. Zweierlei nämlich kommt bei dem schaffenden

Mathematiker in Betracht: Einmal die Phantasie, die Leichtigkeit, mit der er neue Ideen schafft und gestaltet, dann die Kritik, die Schärfe der Beweise, mit der er seine Untersuchungen führt. Das Ideal ist natürlich, daß beide Fähigkeiten gleich ausgebildet sind. Und dies gerade ist bei Gauss zu bewundern, daß er in der Jugend mit ausserordentlicher schöpferischer Phantasie begabt die Probleme zu erfassen wußte, um sie später mit aller Schärfe einer gereiften Kritik durchgearbeitet darzustellen. Diese Kritik nun, welche die Einzelheiten in Betracht zieht, ist wesentlich in der Geometrie des Maasses, die Phantasie dagegen, die alles Zufällige von den Figuren abzustreifen sucht und allgemeinere Gesichtspunkte aufzustellen sucht, ist besonders in der Geometrie der Lage zur Bethätigung gekommen. Dieses gilt natürlich nur im Großen und Ganzen. So z. B. hat v. Staudt, dem die projektive Geometrie ihre systematische Ausbildung verdankt, seine Stärke in der Kritik, während man andererseits Riemann, dessen Untersuchungen, wo sie geometrisch sind, zum größten Teil der Geometrie des Maasses angehören, gewiß nicht Gabe der Phantasie wird absprechen wollen. Die Wirkung dieser verschiedenen Behandlungsweisen war es denn auch, daß in der projektiven Geometrie manches Falsche behauptet wurde, was später abgestreift wurde, dagegen in der Geometrie des Maasses stellenweise eine gewisse Gedankenarmut nicht zu

verkennen ist. — Dies war die allgemeine Basis geometrischer Untersuchungen, die sich etwa bis zum Jahre 1870 gebildet hatte. Seitdem trat bei der Mehrzahl der jüngeren Forscher die Tendenz hervor, beide Gebiete zu kennen, beide zu beherrschen und gerade aus der Verbindung derselben sich die Hülfsmittel zu neuen Ideen zu schaffen. Es hängt dies Streben übrigens mit der allgemeinen Entwicklung der Wissenschaften zusammen. Es war nicht allein auf Mathematik beschränkt. Vor 1870 war allgemein die Tendenz wesentlich auf Specialstudien gerichtet gewesen, man glaubte nur durch ausschließliche Concentration etwas leisten zu können. Man bedachte nicht, daß eine ausschließliche Beschäftigung mit Einzeluntersuchungen leicht eine vollständige Sterilität zur Folge haben kann. In der That geht auf jene Zeit die Definition zurück: Die Mathematik ist diejenige Wissenschaft, bei der sich keine 2 Fachvertreter verstehen können. Jetzt also trat ein Umschwung ein. Es erschien wieder als wünschenswerth sich einen Gesammtüberblick über den Stand der Wissenschaft zu verschaffen, wenn schließlich ja auch jeder Einzelne nur an einem einzelnen Problem wird weiter arbeiten können.

Darf ich jetzt über meine eigenen Arbeiten referieren, so weit sie nicht-euklidische Geometrie betreffen. Ich will zunächst die Titel derselben angeben. Es sind

dies die beiden Abhandlungen. *)

„Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie I, II."
1871, 72. Math. Annalen 4, 6.

Hieran reiht sich insbesondere noch ein Programm aus dem Jahre 1872 **)

„Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen."

Einige kleinere Schriften werden wir zwischendurch noch zu erwähnen haben.

Mein Ausgangspunkt ist selbstverständlich der gewesen, der nun dieser Vorlesung zu Grunde liegt, nämlich an Cayley's Abhandlung anzuknüpfen und zu zeigen, daß die Cayleysche Maassbestimmung gerade zu übereinstimmt mit der nicht-euklidischen Geometrie, wie sie von Lobatscheffsky und Bolyai, Riemann und Beltrami ausgebildet wurde. Die Formeln der Cayley'schen Maassbestimmung mußten zu dem Zwecke ein wenig erweitert werden. Bei Cayley wird nämlich die Entfernung zweier Punkte direkt definiert als der arc. cos. oder arc. sin. eines bestimmten Ausdruckes, während wir dieselben definieren als $\frac{2k}{i}$ arc. cos. und $\frac{2k}{i}$ arc. sin. desselben Ausdruckes, unter k eine beliebige Konstante verstanden. Diese Konstante k, die ja in gegenwärtiger

*) Eine vorläufige Note in den Göttinger Nachrichten vom August 1871.

**) Antrittsprogramm, Erlangen.

Vorlesung immer zur Geltung gekommen ist, mußte also in den Cayleyschen Formeln $\frac{1}{k}$ hinzugefügt werden, um die Formeln der nicht-euklidischen Geometrie zu erhalten. Denn ohne dieses k hätte man ja überhaupt keinen wechselnden Wert des Krümmungsmaaßes ($= \frac{1}{4k^2}$!)

Insbesondere will ich noch bemerken, daß ich damals die Bezeichnungen „elliptische, parabolische, hyperbolische" Maassbestimmung in Vorschlag gebracht habe, die wir bisher benutzten. —

Als nun die Uebereinstimmung von Cayley's Maassgeometrie mit der nicht-euklidischen Geometrie konstatiert war,*) galt es „Folgerungen" aus ihr zu ziehen. Auf diese Folgerungen möchte ich das Hauptgewicht legen, wenn dieselben auch erst in der zweiten Abhandlung ausführlich entwickelt wurden, als ich bemerkte, daß dieselben anderen Mathematikern nicht so selbstverständlich schienen, wie mir selbst. Ich werde dieselben einzeln besprechen, um hernach an die einzelnen Punkte wieder einen Litteraturbericht anzuknüpfen.

a.) Der erste Punkt ist die bereits erwähnte Abweichung von Beltrami, den Unterschied zwischen elliptischer und sphärischer Geometrie, d. h. zwischen der elliptischen

*) Auch Beltrami und Fiedler hatten diese Uebereinstimmung bemerkt, wie sie mir später schriftlich mitteilten.

Geometrie der Ebene und der gewöhnlichen Geometrie auf der Kugel.**) Beltrami hatte behauptet, daß bei positivem Krümmungsmaaß 2 geodätische Linien sich immer in 2 Punkten schneiden müßten, daß also nicht immer durch 2 Punkte zugleich die sie enthaltende geodätische Linie bestimmt ist. Wir sahen, daß dies eben nur bei der sphärischen Geometrie der Fall ist. Wie standen Riemann und Helmholtz zu dieser Frage? Wahrscheinlich haben sie derselben Anschauung sich hingegeben wie Beltrami, doch sind die Andeutungen hierüber zu kurz, daß dies sich mit Sicherheit entscheiden läßt.

b.) Die zweite Folgerung ist der Aufbau eines neuen Systems der reinen Geometrie, das davon ausgeht noch vor Stellungnahme zum Parallelenaxiom zunächst die projektive Geometrie zu begründen und die Discussion der Parallelenfrage erst anzuschließen, wenn die allgemeine Lehre von der Cayley'schen Maassbestimmung entwickelt ist. Es hat dies selbstverständlich im Anschluß an die v. Staudt'schen Untersuchungen zu geschehen. Wir wollen ausdrücklich darauf hinweisen: v. Staudt setzt natürlich das Parallelenaxiom voraus, indem er durchaus im dem gewöhnlichen Raum operiert. Die charakteristische

**) cf. Ann. II. p. 604 (Note), II. p. 125.

Ausgangspunkt in meiner Abhandlung ist daher der, daß überhaupt nur Konstruktionen in einem begrenzten Raumteil ausgeführt werden, den man vollständig überblicken kann. Von den Eigenschaften der Ebenen und geraden Linien kommen dann wesentlich nur in Betracht, daß durch drei beliebig angenommene Punkte eine und nur eine Ebene geht und daß durch 2 Punkte ein Ebenenbüschel geht, dessen Ebenen alle dieselbe Durchschnittsgerade besitzen. Ist dem so, dann wird man alle rein projektiven Sätze sofort auf jedes System von Flächen und Curven übertragen können, welches schlechthin ausgesprochen „dieselben Lagenbeziehungen" in einem gegebenen begrenzten Raum besitzt. Dieses für das Innere eines begrenzten Raumes in dieser Allgemeinheit als geltend anzusehenden projektiven Beziehungen wird man dann durch Erweiterung der Grenzen so weit ausdehnen können, als man überhaupt will. Darauf wird man sich den uns von anderer Seite gegebenen Bewegungen des Raumes als einer speziellen Art der Collineationen zuwenden, nachdem man sich vorher mit Cayley's Maassgeometrie vertraut gemacht hat. (Näheres ist nachzulesen in den Annalen Bd IV. p. 623 und Bd VI. p. 132 ff.).

An diesen Aufbau der projektiven Geometrie knüpft sich eine beiläufige Discussion über den sogenannten Fundamentalsatz der projektiven Geometrie, den wir vor Weihnachten besprochen haben und auf den wir

hier gleichfalls zurückkommen müssen, wenn dies auch eigentlich mit der nicht-euklidischen Fragestellung nichts zu thun hat. Der betr. Fundamentalsatz besagt:

Wir werden 2 gerade Linien dann auf einander projektiv bezogen nennen dürfen, wenn 4 harmonischen Punkten hier allemal 4 harmonische Punkte dort entsprechen.

Wir haben seiner Zeit auch einen genauen Beweis hierfür kennen gelernt; der Beweis, den v. Staudt gab, ist entschieden unvollständig. Auf diese Unvollständigkeit wird eben in Bd. II p. 132 (Note) aufmerksam gemacht, und die sich daran anschließende Discussion zieht sich durch verschiedene Annalenbände hindurch. An derselben habe ich selbst teil genommen in den beiden Publikationen:

Annalen III, (1874): „Nachtrag zu dem zweiten Aufsatz der nicht-euklidischen Geometrie" und

Annalen VIII, (1880): „Ueber die geometrische Definition der Projektivität auf den Grundgebilden erster Stufe."*)

Diese ganze Betrachtung aber betrifft, wie wir schon sagten, nur einen Incidenzpunkt, es handelt sich dabei nicht eigentlich um das Wesen der nicht-euklidischen Geometrie.

c.) Diesem so aufgebauten System der reinen Geometrie können wir entgegenstellen ein entsprechendes System der

*) Hier ist denn auch im Anschlusse an eine Bemerkung von Darboux gerade der Beweis gegeben, den ich vor Weihnachten vortrug.

analytischen Geometrie, (das gleich mit den Coordinaten handelt.) Für die analytische Geometrie haben wir ein erstes System bei Riemann kennen gelernt. Dies ging davon aus, nach Einführung der Coordinaten $x_1, \ldots\ldots, x_n$ gleich als Bogenelement: $ds^2 = \Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ zu definieren, welches dann insbesondere das Bogenelement einer Mannigfaltigkeit konstanter oder verschwindender Krümmung (ebene Mannigfaltigkeit) sein konnte.

Helmholtz hatte bereits einen anderen zweiten Ausgangspunkt, indem er die Gruppe der $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ Bewegungen im Raum von n Dimensionen an die Spitze stellte. Er sagt also: ich nehme n Variable $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ an: in der Mannigfaltigkeit, die von ihnen erzeugt wird, da kann ich mir eine Gruppe von so und so viel Umformungen denken, welche die allgemeinen Maassbestimmungen unverändert lassen. Diese Betrachtung macht Helmholtz zur Grundlage. Demgegenüber hatte ich den allgemeineren Gedanken, dass man beim Studium einer Mannigfaltigkeit, wenn man derselben „geometrischen" Charakter beilegen will, irgend welche Gruppe von Transformationen, bei welcher nicht notwendig je 2 Punkte eine Invariante haben, an die Spitze stellen kann. *) Vor allen Dingen empfiehlt es sich, als solche Gruppe die der Collineationen (der linearen Umformungen) auszuwählen.

*) Ann. VII. p. 116 ff., sowie namentlich das Erlanger Programm.

Dieselbe bietet im Raume von n Dimensionen ∞^{n^2+2n} Umformungen dar. *) Das ist dann die Formulierung der speciell sogenannten „Invariantentheorie," wie wir dieselbe im ersten Teile der Vorlesung kennen gelernt haben. Von der Invariantentheorie steigen wir dann herab zur Cayley'schen Maassbestimmung und damit zu den verschiedenen Räumen konstanter Krümmung (um hier die Riemann'sche Terminologie beizubehalten.)

Welches dieser 3 Systeme ist nun das beste? Nun, meine Meinung ist die, dass es überhaupt kein bestes System giebt, dass man vielmehr je nach den Interessen, die man verfolgt, diese oder jene Gruppierung vorschlagen wird. Wir proklamieren also unbedingte Toleranz in dieser Frage. Ich möchte hier eine persönliche Bemerkung einfügen: Als ich nach Leipzig kam, hatte ein Philosoph, Donath, eine Dissertation geschrieben, betitelt „Ueber das Raumproblem." Dieser hatte von den projektiven Dingen nichts gewusst und also nur über Helmholtz und Riemann

*) Es sind nämlich n+1 homogene unabhängige Variable vorhanden, in den Gleichungen der linearen Transformationen derselben treten $(n+1)^2$ Coefficienten auf, da nun auf der linken Seite die neuen Variabeln noch mit einem unbestimmten Faktor multipliciert sind, so kommt nur das Verhältnis der $(n+1)^2$ Coefficienten in Betracht, woraus folgt, dass nur ∞^{n^2+2n} verschiedene Collineationen möglich sind.

ein Referat gemacht. Ich machte ihn vor dem Drucke seiner Arbeit auf meine eigenen Untersuchungen aufmerksam und veranlaßte ihn, auch auf diese Rücksicht zu nehmen. Dies that er denn auch, indem er seine Schrift gänzlich umarbeitete und nun sagte: die früheren Arbeiten sind jetzt überwunden, nur noch der Ausgang von der projectiven Geometrie ist berechtigt. Da bei dieser Ansicht natürlich wiederholt mein Name genannt ist, so muß ich entschieden dagegen Einspruch erheben, als wäre dies in der That meine Ansicht. Vielmehr spreche ich mich durchaus dahin aus, daß alle genannten drei Systeme neben einander, jedes in seinem Gebiete, zweckmäßig sind.

Nun wollen wir an die Punkte a, b, c einzelne Erläuterungen anknüpfen. Sei es mir dabei gestattet, die Betrachtungen etwas von meinem persönlichen Standpunkte aus vorzutragen.

Zu den zahlreichen Publikationen, die über die betr. Fragen seit 1872 erschienen sind, habe ich bisher immer geschwiegen; doch da ich jetzt im Zusammenhange sie zu erwähnen habe, so werde ich sagen, was ich darüber denke.

Zu d. c. Der Unterschied der elliptischen und sphärischen Geometrie, den ich betonte, ist trotzdem zuerst nicht beachtet worden. Ich möchte:

1.) auf Frischauf, Elemente der absoluten Geometrie 1876, (das zweite Buch des Verfassers) verweisen.

Dort steht Alles friedlich neben einander genannt, was bis dahin entwickelt war. Er sagt ebensowohl, dass sich 2 geodätische Linien bei elliptischer Maassbestimmung immer in 2 Punkten schneiden, als er auch meine Abhandlung nennt, als wenn dieses alles in schönstem Einklang mit einander stände. Im Frischauf also ist die ganze Discussion übersehen.

2.) Zweitens ist zu erwähnen die Arbeit des Astronomen Newcomb in Washington, in Crelle Bd. 83 (1877),*) in der die ganze Theorie des elliptischen Raumes (im Gegensatze zum sphärischen Raume) neu erfunden wird. Diese Abhandlung ist an und für sich sehr gut, doch ohne Kenntnis der Litteratur. Er stellt schlechtweg hin, dass in einem Raum von positiver Krümmung die geraden Linien sich sehr gut auch blos in einem Punkte schneiden können. Er erläutert dies, ohne eine eigentliche Ableitung zu geben. Hieran reiht sich an:

3.) die Abhandlung von Killing, Crelle. Bd. 86 (1879.)

Killing ist auf die betreffende Frage wiederholt zurückgekommen. Er hat vor allem auch ein Lehrbuch verfasst, über welches ich jetzt einiges im Zusammenhange

*) Elementary theorems relating to the geometry of a space of three dimensions and of uniform positive curvature in the fourth dimension. (Die letzten Worte des Titels sind sehr merkwürdig und deuten auf ein Missverständniss.)

sagen will. Dies Buch trägt den Titel: Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. es ist 1885 in Leipzig erschienen. Dies Werke ist zwar keineswegs ohne Bedeutung, doch kann ich gleichwohl demselben nicht in jeder Hinsicht zustimmen, wie ich sogleich noch näher ausführe. Killing unterscheidet auch zwischen den beiden Möglichkeiten, (ich will zunächst unsere bisherige Terminologie beibehalten), daß wir also entweder die elliptische Geometrie oder die sphärische Geometrie haben, es ist der Hauptcharakter seiner Darstellung, daß er beide immer neben einander behandelt. Er behauptet aber, daß wir Anderen die Möglichkeit der sphärischen Geometrie übersehen hätten. Es ist ja überhaupt merkwürdig, wie hier Angriff und Vertheidigung wechselt. Zuerst sagt man ausdrücklich, es giebt neben der sphärischen Geometrie noch eine elliptische, die beide positives Krümmungsmaass haben; das wird dann zuerst übersehen, dann von anderer Seite wiedergefunden, endlich 10 Jahre später gesagt, daß bisher die sphärische Geometrie übersehen sei. Killing hat diese seine Behauptung beibehalten, obwohl ich mit ihm darüber ausführlich correspondierte (1880) und auch folgende Differenz berührte:

Killing sagt, im Falle daß die Krümmung 0 oder negativ ist, giebt es nur je eine Raumform, hierin liegt also ein Unterschied von der Maassbestimmung bei positiver

Krümmung ausgesprochen. Dies musste ich von meinem Standpunkte aus bestreiten. Erinnern wir uns an das, was bei Gelegenheit der automorphen Funktionen gesagt war. Wir fanden, dass wir die euklidische Maassbestimmung sehr leicht auf einer Ringfläche darstellen konnten, dass also der ringförmige Typus der Mannigfaltigkeit zweier Dimensionen sehr wohl mit der euklidischen Maassbestimmung verträglich ist. Wir werden also der Bemerkung von Killing, dass es im Falle der hyperbolischen oder parabolischen Maassbestimmung nur eine mögliche Raumform gäbe, widersprechen; wir werden vielmehr sagen, dass es in diesen Fällen ∞ viele geschlossene Raumformen giebt. *) Nun haben wir noch gegen einen dritten Punkt bei Killing Widerspruch zu erheben. Killing behauptet, die elliptische Raumform sei die Polarform des sphärischen Raumes. Er meint also, wenn man das Princip der Dualität anwendet, so gehe aus dem sphärischen Raum

*) Diese Differenz zwischen Killing und mir kommt offenbar darauf zurück, dass er nur Mannigfaltigkeiten betrachtet, welche als Ganzes in sich selbst bewegt werden können, während ich darauf aus bin (was der Fragestellung des Parallelencongruenz besser zu entsprechen scheint), alle Mannigfaltigkeiten zu finden, auf welchen einfach zusammenhängende einfach berandete Stücke frei bewegt werden können.

der elliptische hervor und umgekehrt. Ja, das kann sicher nicht richtig sein, denn der elliptische Raum ist sich selbst dualistisch. Nicht nur haben in ihm 2 gerade Linien einen Schnittpunkt, sondern auch stets 2 Punkte eine Verbindungsgerade, und wenn wir dualistisch polarisieren in Bezug auf den fundamentalen Kegelschnitt, so geht der Winkelabstand in den Abstand zweier Punkte über und umgekehrt. Wenn wir entsprechend die sphärische Geometrie polarisieren wollten, so muß man an Stelle der Kugelpunkte die Polarebenen in Bezug auf die Kugel, d.h. deren Tangentialebenen, an Stelle der Diametralebenen, (welche die größten Kreise auf der Kugel ausschneiden) deren Pole, d.h. die ∞ fernen Punkte des gewöhnlichen Raumes setzen, was weiter zu verfolgen hier kein Interesse hat.

Mit diesem letzten Punkte hängt nun die Terminologie zusammen, die Killing gebraucht. Was wir als den sphärischen Raum bezeichnen, nennt Killing den Riemann'schen Raum, indem er sich dafür entscheidet, daß Riemann seiner Zeit durchaus nur an die sphärische Möglichkeit gedacht hat, den elliptischen Raum aber nennt er die Polarform des Riemannschen Raumes. Gegen die Benennung „Riemannscher Raum" richtet sich die Bemerkung, daß es nicht ganz klar ist, ob Riemann sich die Mannigfaltigkeit konstanter positiver Krümmung wirklich in dieser Weise gedacht hat; die Benennung „Polarform des Riemannschen Raumes" ist aber durchaus

zu verwerfen. Wenn wir nun doch einmal über besondere Terminologie berichten, so wollen wir gleich mitteilen, was Killing unter „Weierstraß'schen Coordinaten" versteht. Wir sind doch gewöhnt, die elliptische oder sphärische Geometrie auf der Kugel vom Radius a zu studieren. Dieselbe wird dargestellt durch: $x^2+y^2+z^2=a^2$. Es hat nun gelegentlich Weierstraß im Seminar (Sommer 1872), an dem Killing als Student teilnahm, gesetzt $z=ap$, so daß wir: $x^2+y^2+a^2p^2=a^2$ als neue Hülfsfläche bekommen, auf der wir die sphärische Geometrie deuten können. Die Einführung dieser Hülfsfläche hat in der That nach einer Seite hin ihre gute Bedeutung. Wenn nämlich das a^2 negativ wird ($=-b^2$), wir also hyperbolische Maassbestimmung annehmen, so bekommen wir als Kugel, auf der wir die hyperbolische Geometrie deuten, eine Kugel mit imaginärem Radius: $x^2+y^2+z^2=-b^2$. Setzen wir wieder $z=ap=ibp$, so kommt $x^2+y^2-b^2p^2=-b^2$. Dies aber stellt wieder eine reelle Fläche dar, wenn wir $x\,y\,p$ als rechtwinklige Coordinaten im Raume deuten, und zwar ein zweischaliges Hyperboloid, auf dessen einer Schale man dann ein Bild der hyperbolischen Geometrie bekommt. Die genannten Coordinaten bieten also den Vorteil, in jedem Falle zu einer reellen Hülfsfläche zu führen.

Hieran schließt Killing dann noch eine große Reihe weiterer Untersuchungen über n-fach ausgedehnte Räume.

Abl. b. Ich werde heute folgerichtigerweise in Betreff des Punktes b. weitere Bemerkungen machen. Es handelte sich hier um ein neues System der reinen Geometrie, welches im Anschlusse an v. Staudt, doch ohne vorherige Entscheidung des Parallelenaxioms, zu entwickeln war. Rücksichtlich dieses Gesichtspunktes will ich zuvörderst über ein Buch von Pasch in Giessen einiges sagen, das 1882 unter dem Titel erschienen ist: Vorlesungen über neuere Geometrie. Der Verfasser hat gleichzeitig noch eine andere Schrift erscheinen lassen: Einleitung in die Differential- und Integralrechnung, die ich hier mit anführe wegen der Aehnlichkeit der Anschauungen in beiden Büchern. Pasch beginnt in seinem ersgenannten Werke durchaus mit der projektiven Geometrie. Doch führt er weiterhin das System nicht in dem Sinne durch, wie ich es gesagt habe, dass man nämlich in die projektive Geometrie auf Grund der Vierseitskonstruktion, also rein projektivisch, die Zahl einführen soll. Vielmehr betrachtet Pasch in der Mitte des Buches das Messen und erst auf Grund des Messens führt er die Zahl, d.h. die Coordinaten ein. Es liegt also bei Pasch kein konsequent durchgeführtes System vor.

Was mich veranlasst, das Buch von Pasch trotz dem an der jetzigen Stelle zur Sprache zu bringen, hat den Grund, dass eine tiefere Frage dort diskutiert wird. Es ist dies die Frage nach dem Wesen der geometrischen Anschauung.

Hierüber wollen wir etwas ausführlicher sprechen. Es giebt 2 Auffassungen über das Wesen, über die Schärfe, die Exactheit der geometrischen Anschauungen. Die eine, die herrschende, sagt: Wenn wir eine gerade Linie ziehen. (z.B. mit dem Bleistift) und auf derselben einen Punkt markieren, so sind dies allerdings nur rohe Operationen, die aber in uns ein scharfes Bild entstehen lassen. Im Geiste haben wir also eine klare deutliche Vorstellung von dem, was ein Punkt, eine gerade Linie ist. Die andere dagegen sagt: Nicht nur der Strich, den wir ziehen, oder der Punkt, den wir markieren, hat eine gewisse Ausdehnung nach der Breite oder Dicke, die zwar unbedeutend doch nicht verschwindend ist, sondern auch unsere eigene Vorstellung derartiger Figuren, wie sie wirklich ist, nicht wie wir sie begrifflich postulieren, ist immer mit Ungenauigkeiten behaftet. Pasch vertritt nun durchaus diesen zweiten Standpunkt. Ich behaupte, dass unser Vorstellen von den räumlichen Figuren uns nur ein unvollkommenes Bild gewährt, daß wenn wir in der Mathematik mit genauen Figuren operieren, dies nur mit Hinzunahme von begrifflichen Postulaten geschieht. — Wir werden zunächst daran die Bemerkung knüpfen: Wenn die nicht-euklidische Geometrie überhaupt zulässig sein soll, ja dann müssen wir uns für die Annahme einer solchen Ungenauigkeit

unseres Raumvorstellens entscheiden, die erst durch bestimmte begriffliche Festsetzungen beseitigt werden muss. Diese Annahme ist die Vorbedingung der Gauss'schen Doktrin von der nichteuklidischen Geometrie. Ja ohne dieselbe müssten wir ja ganz genau von Augenschein, ob die parabolische oder hyperbolische oder elliptische Ansicht die richtige ist, bez. welcher numerische Betrag des Krümmungsmaasses vorliegt. Wir werden sicher unsere Raumvorstellung auf eine Linie stellen müssen mit ganz gewissen mit Fehlern behafteten Messungen, sie ist eben gewisser Correctionen fähig, die natürlich innerhalb bestimmter Grenzen sich halten müssen, wenn sie nicht unrichtig werden sollen.

Nun wäre zu untersuchen, wie können wir über eine solche fundamentale Frage Klarheit bekommen? Wenn wir immer wieder uns an die Figuren halten, die wir in der Elementargeometrie behandelt haben, ja, dies sind so einfache Verhältnisse, hier hat sich die begriffliche Festsetzung mit dem Bilde, das wir vor Augen haben, so fest associirt, dass wir daraus keine Beweiskraft schöpfen können. Dies ist eine alte Erfahrung. Wenn man eine Theorie in der Jugend gelernt hat, sie stets vor Augen gehabt hat, dann hält man sie späterhin für a priori richtig. Nehmen wir z. B. die Erhaltung der Energie in der Mechanik.

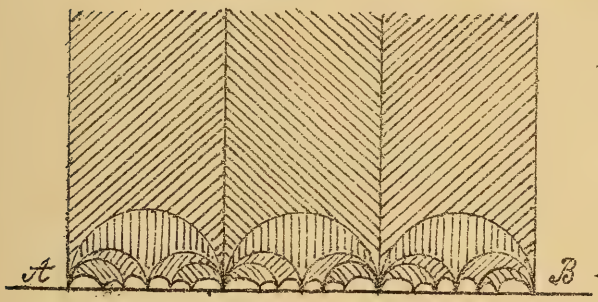
Dieser Gedanke, daß die Kraft, die Bewegung, unzerstörbar sei, ist uns jetzt allerdings ganz geläufig, doch vor 50 Jahren etwa hat man es noch nicht gewußt, vielmehr hat sich diese Anschauung erst gegen manchen Widerspruch siegreich durcharbeiten müssen. Oder wenn dieses Beispiel zu modern ist, der denke an die Gesetze der Trägheit. Daß ein Punkt in geradliniger Bahn mit constanter Geschwindigkeit sich fortbewegt, wenn keine Kraft auf ihn wirkt, dies scheint uns jetzt ganz selbstverständlich. Die Philosophen zur Zeit des Cartesius jedoch hielten die Kreisbewegung für viel einfacher als die auf gerader Linie, daß der Massenpunkt, nur mit einer einmal empfangenen Geschwindigkeit versehen, weiterhin eine gerade Linie und diese gleichförmig beschreibt, hat erst Galilei durch Experimente nachgewiesen und hat großen Widerspruch erfahren. Heute erscheint es als Denknotwendigkeit. Diese Beispiele aus der Mechanik sollen zeigen, wie solche Vorstellungen, die uns jetzt selbstverständlich erscheinen, doch nicht a priori uns innezuwohnen brauchen.

Betrachtet man nun recht genau ein irgendwie gezeichnetes Dreieck, so werden wir durch unsere Gewöhnung wie unwillkürlich dazu geführt, vielmehr an das Idealdreieck, dessen rohes Abbild jenes Dreieck ist, zu denken. Wir wollen daher andere Figuren

nehmen, die uns nicht so von der Elementargeometrie her bekannt sind, und uns fragen, ob bei ihnen nicht die begriffliche Vorstellung, die wir in uns zu bilden haben, über unsere wirkliche Anschauung hinausgeht. Wir wollen die Figuren der Theorie der automorphen Funktionen entnehmen, von denen wir schon neulich einiges erzählten. Dort muß man sich in räumliche Verhältnisse hineindenken, die man anfangs sehr gut übersieht, die aber, wenn man sie vervollständigen will, vermöge ihrer überaus scharfen und immer schärfer werdenden Struktur meinem Dafürhalten nach sich unserem wirklichen Vorstellen bald entziehen. Selbst langjährige Uebung führt, wenn ich von mir selbst reden darf, diese Thätigkeit nicht herbei. Wir wollen z. B. eine Figur betrachten, die in dem Teil der automorphen Funktionen eine Rolle spielt, der sich mit den „ elliptischen Modulfunktionen " beschäftigt. Wir werden diese Figur übrigens in den nächsten Stunden noch öfter gebrauchen. Man zeichne sich zunächst ein Kreisbogendreieck, begrenzt von einem Halbkreise und den beiden parallelen Halbtangenten in den Diametralpunkten. Wir nennen dies ein „Kreisbogendreieck," indem wir die geraden Linien als einen speciellen Fall des Kreisbogens auffassen. Nun sei die Vorschrift, diese Figur an den Seiten

wiederholt nach dem Gesetz der reciproken Radien zu vervielfältigen; es handelt sich dann um die Gesammtfigur, die solcherweise entsteht. (NB. Was gewöhnliche Transformation durch reciproke Radien an einem Kreise ist, ist gewöhnliche Spiegelung in Bezug auf die gerade Linie.)

Figur 15.



Spiegeln wir die Figur zunächst an der geraden Linie A B, so werden wir mit dem ursprünglichen Dreieck übereinstimmende (congruente) Dreiecke erhalten, welche sich nach links und rechts in unendlicher Zahl anreihen. Bei der Spiegelung an dem Halbkreise gehen die begrenzenden geraden Linien gleichfalls in 2 Halbkreise über, welche von dem ersteren überspannt werden. Noch können wir die Figur sehr gut übersehen. Doch wir wollen diese Spiegelung nun an den neu entstehenden Begrenzungslinien immer wiederholt vornehmen; es entstehen dann Kreisbogendreiecke in unbegrenzter Zahl, die sich dichter und immer dichter werdend auf die gerade Linie A B. zudrängen. Die Dreiecke werden endlich

kleiner werden als jede Ausdehnung, die man vorschreiben möge, kleiner als jede Grösse, die durch die Leistungsfähigkeit der Optik noch sichtbar gemacht werden kann. Ja, in der Theorie der Modulfunktionen ist jedes solche kleine Dreieck so gross wie das ursprüngliche. Wir werden bei nächster Gelegenheit eine Transformation aufstellen, die ein jedes so kleine Dreieck in ein grosses überführt. *) die automorphe Funktion verläuft in dem grossen Dreieck nicht anders wie in dem kleinen. Doch vorstellen kann man sich dies sicher nicht. Es belehrt uns dies Beispiel darüber, dass die begriffliche Forderung, mit der man in der Mathematik operiert, über die lebendige Vorstellung, deren Genauigkeit eine begrenzte ist, hinausgeht. Wir haben hier übrigens nur ein elementares Beispiel aus der Theorie der automorphen Funktionen dargestellt, es giebt z. B. auch solche Figuren, wo in jedem Dreieck der Modulfigur noch ein kreisförmiger Ausschnitt, ein Fenster sich befindet, in welchem sich alles wieder spiegelt. Die neuere Funktionentheorie liefert noch eine ganze Reihe anderer frappanter Beispiele dieser Art.

Man wird aus dem bisher Gesagten ersehen, dass diese Frage nach der Natur der räumlichen Anschauung

*) nämlich die Transformation $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, wo $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ vier ganze Zahlen von der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ sind.

selbstverständlich auch bei der Begründung der Differentialrechnung eine ausserordentlich grosse Rolle spielt. Historisch hat bekanntlich die Differentialrechnung an die Betrachtung einer Curve oder der Geschwindigkeit eines in Bewegung befindlichen Punktes sich geknüpft. Der Differentialquotient wurde durch die Tangente der Curve, bezw. die Geschwindigkeit des Punktes geliefert. Auch dies sind Bilder, die der ungenauen räumlichen Anschauung entnommen sind. Es ist nun die den früheren Betrachtungen ganz analoge Frage, ob diese Bilder nicht vielleicht nur eine äussere Veranlassung sind, sich eine exacte Differentialrechnung zu schaffen, die aber mit ihren feineren Festsetzungen über die äussere Veranlassung hinausgreift. In Betreff dieser Frage bringe ich folgende Thatsache in Erinnerung, dass die neuere Funktionentheorie stetige Funktionen ohne Differentialquotienten kennt, während doch die natürliche Anschauung uns zu belehren scheint, dass jede stetige Curve eine Tangente habe. Noch in den letzten Decennien hat man sich immer wieder gesagt, dass eine stetige Funktion notwendig einen Differentialquotienten besitzen müsse. Wie ist nun dieser Zwiespalt zwischen der Differentialrechnung und der Anschauung anders zu erklären als durch unsere

Annahme von der Ungenauigkeit der Anschauung.

Ich darf hier einen kleinen Aufsatz von mir selbst nennen aus dem Jahre 1873: „Ueber den allgemeinen Funktionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Curve." (Einführung des „Funktionsstreifens"). Diese Arbeit erschien damals in den Erlanger Berichten, sie ist aber seitdem abgedruckt in den Math. Ann. Bd. 22. Der Grundgedanke in dieser Schrift ist: klar auseinander zusetzen auf die Annahme, jede Curve habe eine Tangente und also habe jede stetige Funktion einen Differentialquotienten, in der That auf die Ungenauigkeit unserer Auffassung zurückgeht. Pasch hat in seinem Buche über Differential- und Integralrechnung vom Jahre 1882 gleichfalls diesen Gedanken vertreten. Es ist diese Ansicht aber selbstverständlich nicht unwidersprochen geblieben. Eine Darstellung von der Gegenseite ist z.B. Köpcke, Math. Ann. 29 (1886): Ueber Differentiirbarkeit und Anschaulichkeit der stetigen Funktionen." (Insbesondere pag. 136 ff.) Wir wollen schließlich noch auf eine hierher gehörige Arbeit von Pasch hinweisen, Ann. 30. (1887): Ueber die projektive Geometrie und die analytische Darstellung der geometrischen Gebilde," eine Arbeit, in der er seine von der meinigen doch vielfach abweichende Auffassung nochmals zusammenfasst. Wir gehen

diese Citate als Material für ein ausführliches Studium, ohne weiter darauf eingehen zu wollen. Ich möchte jedoch den Wunsch aussprechen, daß ein Mathematiker, der zugleich moderne psychologische Kenntnisse besitzt und also weiß, was die heutige Erkenntnistheorie über unser Vorstellungvermögen sagt, diese Frage einmal ausführlich discutierte. Die Philosophen, welche bisher über solche Fragen geschrieben haben, standen nicht auf der Höhe der mathematischen Bildung, z. B. wußten sie nichts von der automorphen Funktionentheorie. Uebrigens möchte ich mir vorbehalten, in den nächsten Stunden auf diese Fragen wiederholt zurückzukommen, indem ich in Verbindung damit geradezu discutiere: „Was sind die Axiome der Geometrie und wie sind sie entstanden?" Bei Helmholtz und anderen sind diese Fragen nach der Genauigkeit unserer räumlichen Anschauung übergangen, gerade auch da, wo von der Entstehung der Axiome die Rede ist, und diese Entstehung auf die doch jedenfalls ungenaue Operation des thatsächlichen Messens zurückgeführt wird. Daß die Mathematik genauere Festsetzungen bedarf, als die natürliche Vorstellung bietet, daß also noch ein Sprung stattfindet zwischen dem Begrifflichen und dem unmittelbar Angeschauten, ist von all'

diesen Autoren nicht berührt, auch die Bücher über Differentialrechnung (mit Ausnahme von Pasch) schweigen darüber.

Ich möchte nun zurückkommen auf jenen Evidenzpunkt unter b, der sich auf den Beweis des Fundamentalsatzes der neueren Geometrie bezieht, nämlich des Satzes: daß zwei Gebilde erster Stufe projektiv auf einander bezogen sind, wenn je 4 harmonischen Elementen des einen immer 4 harmonische Elemente des anderen entsprechen. Ich hatte schon erwähnt, daß ich beiläufig in meiner Arbeit über die nicht-euklidische Geometrie hierauf eingegangen bin und bemerkte, daß der v. Staudt'sche Beweis nicht ausreichend ist. Die sich hieran knüpfende Discussion stellte das Wesen der Sache jedenfalls viel klarer. Ich möchte über diese Discussion einiges berichten.

Es sind eine ganze Reihe von Namen zu nennen:
Lüroth und Zeuthen in den Annalen VII.
Thomae und Reye in ihren bezüglichen Lehrbüchern der neueren Geometrie.
Darboux in den Annalen 17.
Schur, Annalen 18, endlich Pasch.

Wenn man die Bemerkungen, die von den verschiedenen Seiten gemacht wurden vergleicht, sieht man, daß wieder 2 fundamental verschiedene Auffassungen einander gegenüber stehen. Die einen Gelehrten sehen

sich in der Lage, wenn man von Punkten und geraden Linien spricht, unmittelbar die gewöhnliche Anschauung zu benutzen, sie operieren z.B. mit der Vorstellung, daß ein Punkt längs einer geraden Linie sich stetig verschiebt, wenn dabei etwa zwei Punkte sich einholen, so giebt es eine scharf bestimmte Coincidenzstelle. Bei ihnen ist also die Bildung des Begriffs der Stetigkeit unmittelbar durch die Intuition gegeben. Dementsprechend sehen sie es auch als gestattet an, gleich in den Fundamenten geometrische Beweise auf solche Vorstellungsweisen zu begründen.*) Hiermit hängt zusammen die Stellung, die man zu dem Irrationalen in der Mathematik zu nehmen hat. Wenn wir dieser Schärfe der Anschauung huldigen, so ist die Annahme der Irrationalzahlen einfach eine Folge der Anschauung.

Die andere Auffassung dagegen sagt, daß man es zunächst mit ungenauen Punkten zu thun hat,

*) Weiter hinauf, wo es sich nicht mehr um die Fundamente handelt, benutze ich selbst gern solche geometrischen Beweise, ich betrachte dieselben aber nur als eine Skizzierung der genauen Beweise und lasse mich auf letztere nur darum nicht ein, weil ich annehme, daß der Uebergang von der geometr. Anschauung zu exacten Formulierungen eben in den Fundamenten bereits erledigt worden sei

und in der geometrischen Anschauung nur eine Veranlassung hat, sich parallellaufende genauere Begriffe auf logischem Wege zu bilden; die wirklichen Begriffe sind daher wesentlich schärfer als die geometrische Anschauung. Hier wird man gut thun, die mathematische Betrachtung der geometrischen Verhältnisse auf einen vorerst arithmetisch ausgebildeten Begriff der Irrationalzahl zu gründen.

Die erste dieser beiden Auffassungen ist durch die Tradition von Euklid her sanctioniert. Man vergleiche auch Dedekind in Braunschweig, der in seiner kleinen, aber sehr lesbaren Schrift: „Ueber Stetigkeit und irrationale Zahlen" es wohl am schärfsten ausgesprochen hat, daß die Existenz der Irrationalzahlen geradezu eine Folge der geometrischen Anschauung sei.

Die Anwendung dieser Bemerkungen auf den Grundsatz der projektiven Geometrie sondert sich nun so: Wenn man sich der zweiten Anschauung anschließt, so ist es, wie gesagt, zweckmäßig, die Lehre von den Irrationalen vorher zu entwickeln und dann erst den v. Staudt'schen Grundsatz zu betrachten. In diesem Falle giebt es nicht einen besseren Beweis des Satzes als den von uns früher vorgetragenen, der sich

an Darboux Anm. 17 anschliesst. *) Wir schieden, wie man sich erinnern wird, zwischen den rationalen und irrationalen Punkten, wiesen die Gültigkeit des v. Staudt'schen Satzes zunächst für die rationalen Punkte nach und schlossen dann auf indirektem Wege auf die irrationalen. Wenn man sich dagegen der anderen Anschauung anschliessen will, dass das Irrationale direkt aus der geometrischen Betrachtung der Figuren abgelesen wird, dann treten andere Beweise in ihr Recht, bei denen man mit Punkten operiert, die längs einer geraden Linie sich stetig fortbewegen. In diesem Sinne wollen wir auf Schur verweisen: Anm. 18.

Nun will ich hieran noch eine litteratische Bemerkung knüpfen. Der hier besprochene Gegensatz der beiderseitigen Anschauungen über das Wesen der Geometrie ist in einem Werke verarbeitet worden, das der Mathematiker Du Bois im Jahre 1882 veröffentlicht hat unter dem Titel: „die allgemeine Funktionenlehre." Es ist nur ein erster Teil erschienen, aber in diesem gerade finden sich die Auseinandersetzungen, die wir meinen. Du Bois lässt geradezu 2 Vertreter der beiden Richtungen debattieren, einen „Empiristen"

*) resp. an meine eigene in Anm. 17 gegebene Reproduction des Darboux'schen Gedankenganges.

mit einem „Idealisten", ohne jedoch schliesslich eine Entscheidung darüber zu treffen, wer von beiden nun Recht habe. Er lässt vielmehr jedem Mathematiker zum Schluss freie Entscheidung, was er denken will. Danach möchte ich nun meine eigene Ansicht mit folgenden Worten bezeichnen. Ich betrachte die geometrischen Eigenschaften der wirklich angeschauten Figuren (die ich als ungenau hinstelle) vom Standpunkte des Empiristen; sobald aber von einer mathematischen Behandlung die Rede sein soll, so stelle ich idealistische Anforderungen, indem ich absolute Schärfe der begrifflichen Festsetzungen verlange. Um auf unser Beispiel zurückzukommen: Ich sehe die irrationalen Punkte nicht wirklich vor mir, wie ich denn zwei Punkte, die einander ganz nahe gerückt sind, auch in der Vorstellung nicht mehr unterscheiden kann; ich verlange jedoch, dass sie in der mathematischen Behandlung geschieden werden. Ich will diese Ansicht hier noch durch Zweckmässigkeitsgründe motivieren. Wir finden auf der einen Seite die angewandte Mathematik, in der es sich um Verhältnisse handelt, die nur bis zu einem gewissen Grade Genauigkeit verlangen und sogar vertragen; auf der anderen Seite jedoch haben wir die reine Mathematik, in der, um z. B. speciell an die Funktionentheorie zu erinnern, die empiristische Auffassung

durchaus nicht ausreicht. Ich muß daher, da ich keines der genannten Gebiete fallen lassen will, einen Standpunkt einnehmen, der beiden Anforderungen gerecht wird. Der einzige dies leistende Standpunkt scheint mir der oben angegebene zu sein. Ich habe übrigens diese selbe Sache am Ende des letzten Sommersemesters in meiner Vorlesung über die Differentialgleichungen der Physik berührt. *) Es handelte sich dort um die Convergenz unendlicher Reihen. Ich habe damals ausdrücklich auf den Unterschied hingewiesen zwischen der angewandten Mathematik, welche nur beschränkte Genauigkeit beansprucht und der reinen Mathematik, die absolut genau sein will. Unter angewandter Mathematik habe ich dort freilich, der Kürze halber, nur Physik, Mechanik, Astronomie u.s.w. verstanden, nicht aber Geometrie: In bezug auf diese will ich daher jetzt hinzufügen, daß ich alle Geometrie, welche sich auf gezeichnete oder auch nur wirklich vorgestellte Figuren bezieht, in dem hier in Betracht kommenden Sinne der angewandten Mathematik zurechne, alle Geometrie aber, welche unbekümmert um die wirkliche Vorstellbarkeit der in Betracht gezogenen Operationen rein logisch verfährt, der reinen Mathematik.

*) vergl. Ausarbeitung.

Hieran knüpft sich noch eine allgemeine Bemerkung darüber, ob wir mit unserem streng mathematischen Bestrebungen in den letzten Decennien nicht zu einseitig vorgehen. Es ist doch sicher, daß die reine Mathematik immer sich mit den Anwendungen in lebhaftester Verbindung halten soll, wenn sie auch noch so sehr als Selbstzweck verfolgt werden mag. Wenn wir uns nun fragen, was dies für Theorien der reinen Mathematik sind, die bei den Anwendungen besonders in Betracht kommen, so sind dies folgende: Es gilt nicht aus scharfen Praemissen scharfe Schlüsse zu ziehen, sondern vielmehr diejenigen Schlüsse anzugeben, die sich aus Praemissen von begrenzter Genauigkeit mit vorgeschriebener Genauigkeit folgern lassen, oder auch zu sagen, mit welcher Genauigkeit noch Schlüsse gezogen werden können. Hier werden dann alle diejenigen Gebiete der reinen Mathematik als besonders wichtig erscheinen, die man als die Lehre von der Interpolation, der Differenzenrechnung und dergl. bezeichnet. Wenn man Acht gibt, was z. B. der rechnende Astronom von der reinen Mathematik besonders gebraucht, so wird man finden, daß dies eben die erwähnten Gebiete sind. Ganz Entsprechendes gilt für jeden Physiker, der sich mit

der molecularen Struktur der anscheinbar homogenen Materie beschäftigt. In diesem Sinne muss ich anerkennen, dass es eine mathematische Schule gibt, die ihre ganze Energie in den letzten Decennien gerade auf diese Fragen gerichtet hat. Es ist dies eine Schule, die in Deutschland schwer zugänglich ist, die russische Schule von Tschebyscheff in Petersburg (gest. 1821). Ich betrachte es als wünschenswert, dass wir in Deutschland genauer unterrichtet werden von der eigentlichen Leistung dieser Schule.

Ich will jetzt zu unseren engeren Betrachtungen zurückkehren, die sich auf eine Begründung einer rein projectiven Geometrie beziehen. Wir wollen eine Lücke ausfüllen, die da gelassen war im Verlauf unserer Vorlesung. Es handelte sich um die Bemerkung von Staudt's, dass man rein projectivisch die Zahl in die geometrischen Verhältnisse einführen kann, eben vermittelst der Vierseitskonstruktion. Ich habe dies streng nachzuweisen, aber bisher aufgeschoben, um in der Zwischenzeit erst die Hülfsmittel bereit zu stellen, die wir dabei benutzen wollen. Wir können unserer folgenden Betrachtung dementsprechend die Ueberschrift voransetzen: Einführung der projectiven Coordinaten

ohne jede Maassgenauheit, nur mit Hülfe der Vierseitskonstruction; dem fügen wir gleich hinzu, entsprechend der ganzen Anlage unserer Vorlesung: „und ohne über das Parallelenaxiom eine Annahme zu machen." Wir werden diesem letzten Umstande Rechnung tragen, wenn wir uns, wie schon neulich angedeutet, auf Konstruktionen beschränken, die nicht über einen begrenzten Raum hinausgehen. Ob dann die gerade Linie, wenn wir ihre Verlängerung über den einmal angenommenen Raumteil hinaus berücksichtigen wollten, das Parallelaxiom befriedigt, oder allgemein zu reden, ob wir, wenn wir auf Maassverhältnisse achten, elliptische, parabolische oder hyperbolische Maassbestimmung voraussetzen, dies ist dann eine Frage für sich. Wir wollen nun zeigen, wie wir die Coordinaten der projektiven Geometrie innerhalb eines begrenzten Raumteiles thatsächlich einzuführen im Stande sind. Die einzige Voraussetzung, die wir dabei machen müssen, zeigt folgende Ueberlegung: Wir haben früher den v. Staudt'schen Satz kennen gelernt, dass wir zu 3 Punkten a, b, d einer geraden Linie unter Anwendung der Vierseitskonstruktion den vierten Punkt c konstruieren, der mit den ersten der gewöhnlichen Sprechweise zufolge ein harmonisches Quadrupel bildet, dass wir dann stets auf denselben Punkt c treffen, wie verschieden wir das

betr.: Versuch auch wählen müssen. Wir haben diesen Satz jedoch nur beweisen können, indem wir im dreidimensionalen Raume, sagen wir in einem begrenzten Raumstück, mit Punkten, Strahlen und Ebenen operierten. Die Voraussetzung, die wir hier machen müssen, ist, wie wir ausdrücklich angeben wollen, dann die: Wir müssen annehmen, dass durch 3 Punkte unseres Raumstückes immer eine und nur eine Ebene geht, wenn es nicht ∞ viele sind. (Im letzteren Falle liegen die drei Punkte auf einer geraden Linie). Dies ist eine Annahme, zu der uns unsere Anschauung, gewiss aber nur ungenau, hinführt, doch verlangen wir jetzt mit aller begrifflichen Schärfe, dass diese Annahme auch genau, mit aller Strenge stattfindet. Dies sei unser Axiom. Man erkennt, welche Bedeutung wir dem Worte „Axiom" beilegen. Man liest gewöhnlich: „Das Axiom drückt eine Thatsache aus, die uns in unserer Anschauung unmittelbar deutlich ist, die also keines Beweises mehr fähig ist." Ich würde statt dessen sagen: „Ein Axiom drückt eine Forderung aus, dass das, was uns ungenau in der Auffassung vorschwebt, genau richtig sein soll." Dies entspricht auch der Wortbedeutung von „Axiom" (gleich „Forderung.") Haben die alten griechischen Geometer wirklich nur erstere Auffassung gehabt, als sie ihre Axiome aufstellten?

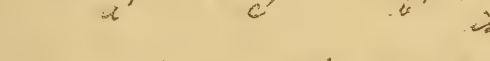
Dies wäre also die Voraussetzung, die wir gebrauchen, um nachzuweisen, dass aus den drei Punkten a, b, d auf Grund der Viereckskonstruktion nur ein bestimmter Punkt c folgt. Die Punkte, die wir zeichnen, sind allerdings ungenau; die Punkte, die wir postulieren, sollen aber genaue Punkte sein, und auf sie bezieht sich dann unser Theorem.

Wir haben bereits früher gesagt, : indem wir jetzt den Punkten a, b, d die Zahlenwerte 0, 1, ∞ beilegen, wollen wir den Punkt c mit der Zahl 2 bezeichnen. Es wurde dann behauptet, dass wir durch immer wiederholte Viereckskonstruktion in der Lage seien, allen Punkten auf der geraden Linie bestimmte Zahlen zwischen −∞ und +∞ beizulegen. Wir haben also jedenfalls weiterhin erstens zu zeigen, dass man überhaupt auf jedem Grundgebilde erster Stufe mit Hülfe wiederholter Viereckskonstruktion eine Skala konstruieren kann, d. h. dass man von 3 Elementen ausgehend, denen man 0, 1 und ∞ als Zahlen beilegt, jedem anderen Element des Gebildes einen bestimmten Zahlenwert λ beilegen kann.

Doch noch ein zweiter Punkt ergab sich, auf den dieser Satz unmittelbar hinleiten musste.

Wir können auf derselben geraden Linie (demselben Grundgebilde) irgend eine zweite Skala aufstellen, indem wir von beliebigen drei anderen Punkten a', b', c' ausgehen. Es ist nun die Frage, wie hängen diese so definierten x' mit den früheren x zusammen, d.h. welches ist die Coordinatentransformation, welche die x' in die x überführt und umgekehrt? Wir hatten behauptet, man kann zeigen, dass diese Substitution durch die linear gebrochene Abhängigkeit gegeben wird: $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$.

(Fig 76.)



Diese beiden Behauptungen müssen wir jetzt erbringen. In der That hat man damit die Grundlage für die analytische Behandlung der projektiven Geometrie. Man kann dann z.B. leicht zeigen, dass die geraden Linien der Ebene sich durch Gleichungen ersten Grades ausdrücken, etc. etc. Es ist offenbar eine Ehrenpflicht für uns, dies jetzt durchzuführen.

Wir wollen nun wieder vorerst, um leichter die Verhältnisse zu erfassen, auf die es schließlich ankommt, voraussetzen, dass die gewöhnliche messende Geometrie bekannt ist. Unter dieser Voraussetzung wollen wir uns dann überzeugen, wie wir von der

Punkten $x=0$, $x=1$, $x=\infty$ ausgehend, unter x eine gewöhnliche Abscisse verstanden, eine immer wiederholte Konstruktion des vierten harmonischen Punktes so anordnen können, dass wir jeden Punkt mit rationaler Abscisse und zwar jeden einmal erreichen können. Dies wird gleichsam ein Vorstudium zu der weiteren Betrachtung unserer Frage sein. Um deutlich zu machen, worauf es uns jetzt ankommt, werden wir zunächst in Bezug auf 0 und 1 zu ∞ den vierten harmonischen Punkt suchen und diesem den Zahlenwert $\frac{1}{2}$ beilegen, hierauf in Bezug auf 1 und ∞ zu 0 den vierten harmonischen Punkt, dem wir den Wert 2 beilegen und in Bezug auf 0 und ∞ zu 1 den vierten harmonischen Punkt, dem wir den Wert -1 beilegen. Jetzt wäre die Frage, wie wollen wir nun weiter gehen, welche 3 Punkte wollen wir nun herausgreifen, um zu ihnen den vierten harmonischen zu suchen? Wir sehen, wir haben schon jetzt eine grosse Reihe von Möglichkeiten für die Auswahl dieser Punkte, die sich noch erheblich vermehren werden, sobald wir jetzt noch weitere Punkte konstruiert hätten. In dieser Reihe von Möglichkeiten wollen wir nun Ordnung schaffen, indem wir eine bestimmte Verabredung treffen.

Wir wollen die Fig. auf pag. 304 benutzen, die der Theorie der elliptischen Modulfunktionen entlehnt ist. Der Zweck

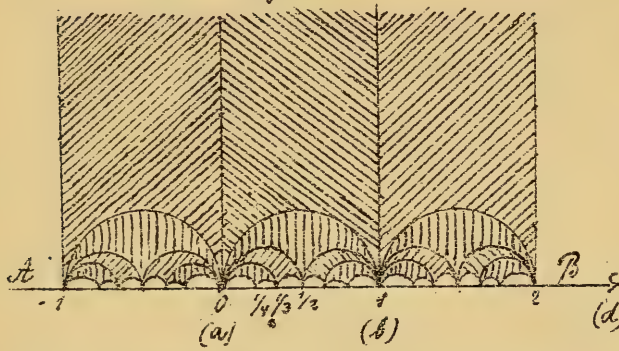
dieser Anlehnung an die Modulfunktionen ist natürlich nur der, übersichtlich vorbereitet zu haben welche Punkte wir bei Aufstellung der Skala konstruktiv haben, um von ihnen in ganz bestimmter Weise weiter zu gehen. Der Ausgangspunkt für unsere weitere Betrachtung ist daher, wie wir nochmals hervorheben wollen, der:

„Die große Unbestimmtheit, welche zunächst in der Forderung liegt, aus den 3 Punkten 0, 1 und ∞ immer wieder einen neuen (4ten harmonischen) Punkt abzuleiten, wollen wir dadurch beseitigen, daß wir genau so bei der Aufsuchung immer wieder eines neuen 4ten harmonischen Punktes vorgehen, wie dies in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen bei der Konstruktion der Dreiecksecken thatsächlich geschieht, indem wir aus dem anfänglich gegebenen Kreisbogendreieck 01∞ immer wieder erneut durch Symmetrie (oder durch Inversion) ein neues Kreisbogendreieck herstellen, welches sich an den Komplex der bereits construirten Kreisbogendreiecke glatt anschmiegt."

Wir werden so z. B. die Punkte 2 und 1/2 durch die erste Spiegelung des Dreiecks an den geradlinigen Seiten finden, den Punkt 1/2 durch Inversion des ursprünglichen Dreiecks in Bezug auf den begrenzenden

Halbkreis. Wenn wir das letzthin erhaltene Dreieck

Figur 79.



ferner in Bezug auf den links liegenden begrenzenden Halbkreis durch Inversion umformen, erhalten wir den Punkt 1/3, der der 4te harmonische Punkt zu 1 in Bezug auf 0 und 1/2 ist, u.s.w. fort.

Wir wollen nun einmal einen bestimmten, in der angegebenen Weise festgelegten Punkt der Geraden AB ins Auge fassen. Wir sagen, dieser Punkt hat die Abscisse $\frac{x_1}{x_2}$, wo x_1 und x_2 beliebige ganze Zahlen sind. Wir wollen ferner ausdrücklich festsetzen, daß die Zahlen x_1 und x_2 keinen gemeinsamen Teiler besitzen sollen. Wir können dies, ohne eine Einschränkung zu machen, annehmen; denn wäre ein gemeinsamer Teiler da, so brauchten wir ihn nur einfach wegzuheben. Doch wollen wir über das Vorzeichen von x_1 und x_2 keine Bestimmung treffen, wir wollen vielmehr setzen: $r = \frac{\pm x_1}{\pm x_2}$, und uns vorbehalten, beide absolut aus + oder beide Male das − Zeichen zu wählen, je nachdem es uns besser passt. Wir werden wir nun

insbesondere hiernach den 0-Punkt und den Unendlichkeitspunkt darstellen? Offenbar müssen wir im Betreff des Nullpunktes, wenn wir im Zähler für x_1 Null setzen, im Nenner 1 nehmen; denn würden wir etwa $x_2 = 2$ oder 3 setzen, so würden Zähler und Nenner ja den gemeinsamen Teiler 2 resp. 3 besitzen. Entsprechendes gilt für den Unendlichkeitspunkt.

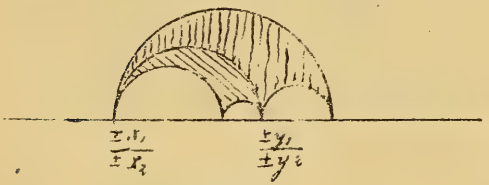
Wir setzen also:

$$0 = \frac{\pm 0}{\pm 1}, \quad \infty = \frac{\pm 1}{\pm 0}.$$

Ehe wir nun hierauf gestützt, das Fortschreitungsgesetz für die Darstellung der Punkte auf der Geraden AB angeben, wollen wir noch eine allgemeine Bemerkung vorausschicken: Wenn wir zwei Punkte $\frac{x_1}{x_2}$ und $\frac{y_1}{y_2}$ haben, so wird (sofern wir, wie wir augenblicklich thun, mit den gewöhnlichen Formeln der analytischen Geometrie operieren) die Gesammtheit aller der Punktepaare, die zu den ersten beiden Punkten harmonisch ist, in ihren Abscissen gegeben durch: $\frac{x_1 + \lambda y_1}{x_2 + \lambda y_2}$ und $\frac{x_1 - \lambda y_1}{x_2 - \lambda y_2}$. Es sei nun der eine Endpunkt eines beliebigen in der Figur vorkommenden Kreisbogens mit $\frac{\pm x_1}{\pm x_2}$, der andere mit $\frac{\pm y_1}{\pm y_2}$ bezeichnet. An einen solchen Kreisbogen reiht sich nun einerseits ein Dreieck an, das im Innern

und andererseits ein Dreieck, das nach oben zu einer neuen Ecke führt, nämlich jene beiden Dreiecke, zu deren Begrenzung jener erste Kreisbogen gehört. Es wird nun die Frage sein, in welcher

Fig. 78.



arithmetischen Beziehung die so genannten Punkte $\frac{x_1}{x_2}$ und $\frac{y_1}{y_2}$ zu einander stehen und ferner, was es für ein zu ihnen harmonisches Punktepaar ist, das durch die Ecken der anliegenden Dreiecke geliefert wird. Wir bemerken wir kommen hier ganz in die Zahlentheorie hinein, (wie wir ja auch bereits sagten, dass x_1 zu x_2 und y_1 zu y_2 „teilerfremd" sein sollen.). Der erste Teil der Frage sei wie folgt beantwortet:

Ich behaupte, in unserer Figur sind immer solche 2 Punkte durch einen Kreisbogen mit einander verbunden, die bei ihrer Darstellung in der Gestalt $\frac{\mp x_1}{\mp x_2}$ und $\frac{\mp y_1}{\mp y_2}$ eine Determinante $\mp x_1 y_2 \mp x_2 y_1 = \pm 1$ geben.

Ich behaupte jedoch noch weiter:

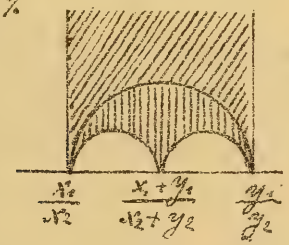
Umgekehrt wird auch jedes Zahlenquadrupel x_1, x_2, y_1, y_2, welches eine Determinante ± 1 giebt, in unserer Figur durch 2 Punkte vorgestellt sein die durch einen Kreisbogen verbunden sind.

Beiläufig sei bemerkt, wenn wir die Determinante gleich ± 1 setzen, so hängt dies eben damit zusammen, daß wir die Vorzeichen von x_1 und x_2; y_1 und y_2 nun bestimmt gelassen haben.

Was nun die beiden Punkte anbetrifft, die wir den ersten beiden zuordnen, so werden offenbar deren Abszissen, (da es sich um harmonische Punkte handelt) in der Form darstellbar sein: $\frac{x_1 + \lambda y_1}{x_2 + \lambda y_2}$ und $\frac{x_1 - \lambda y_1}{x_2 - \lambda y_2}$

Ich behaupte dann, daß in diesem Falle λ der Wert 1 beizulegen ist, so daß die beiden Punkte gegeben sind durch: $\frac{x_1 + y_1}{x_2 + y_2}$ und $\frac{x_1 - y_1}{x_2 - y_2}$, wobei wir natürlich im Zähler und Nenner wohl 1 hinzusetzen können, damit es den Anschein verliert, als sei der Punkt x vor dem Punkte y bevorzugt.

Fig 79.



Der Beweis, den wir zu führen haben, gliedert sich dem Gesagten entsprechend in 2 Teile. Einmal werden wir nachzuweisen haben, daß alle Punktepaare in der Figur dem angeführten Gesetz gehorchen, dann daß umgekehrt alle Zahlen, die dem Gesetz gehorchen, als Abszissen aufgefaßt auf Punkte unserer Figur führen.

Den ersten Teil des Beweises führen wir durch

vollständige Induktion. Wir zeigen zunächst, daß unsere Behauptung richtig ist für gewisse ausgewählte Punktepaare. Wir betrachten z. B. die beiden Punkte des Ausgangsdreiecks $\frac{x_1}{x_2} = \frac{0}{1}$ und $\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{1}$. Die Determinante derselben ist, (wenn wir die Vorzeichen in der angegebenen Weise willkürlich wählen) sicher gleich -1. $(x_1 y_2 - x_2 y_1 = -1)$.

Nun wollen wir in der angegebenen Weise aus $\frac{x_1}{x_2}$ und $\frac{y_1}{y_2}$ die weiteren Punkte bilden. Wir erhalten:

$$\frac{x_1 + y_1}{x_2 + y_2} = \frac{1}{2} \text{ und } \frac{x_1 - y_1}{x_2 - y_2} = \frac{-1}{0} = \infty$$

Wir sehen, daß in der That dies die dritten Eckpunkte der beiden Dreiecke sind, die sich an den Halbkreis über x und y anschließen.

Um das Verfahren der Induktion durchzuführen, müssen wir daher nachweisen, daß die aufgestellte Behauptung, wenn sie für ein beliebiges Punktepaar x, y richtig ist, auch für das folgende gilt. Es sei also jetzt beliebig irgend ein Punktepaar $\frac{x_1}{x_2}$ und $\frac{y_1}{y_2}$ mit der Determinante $x_1 y_2 - x_2 y_1 = \pm 1$ gegeben. Offenbar muß auch einer der beiden Punkte $\frac{x_1 + y_1}{x_2 + y_2}$ und $\frac{x_1 - y_1}{x_2 - y_2}$ schon bestimmt sein, denn sonst könnten wir ja gar nicht die Punkte x und y erhalten haben. So z. B. gingen wir anfangs aus von den Punkten 0, 1 und ∞, wo letzterer auch als

$\frac{0-1}{1-1}$ sich darstellt. Es sei $\frac{x_1+y_1}{x_2+y_2}$ der bereits bestimmte Punkt. Wir finden dann als harmonischen Punkt notwendig $\frac{x_1-y_1}{x_2-y_2} = \frac{z_1}{z_2}$ als Ecke des nächsten Dreiecks. Da rückwärts $\frac{x_1}{x_2} = \frac{z_1+y_1}{z_2+y_2}$, $\frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1+x_1}{z_2+x_2}$, so haben wir nur noch

zu zeigen, daß $x_1 z_2 - z_1 x_2 = \pm 1$ und $y_1 z_2 - z_1 y_2 = \pm 1$ ist. Denn dann erfüllen die Punktepaare $(xz)(yz)$ dieselben Bedingungen, die wir ursprünglich an (xy) stellten, und wir können also von ihnen ausgehend in gleicher Weise weitergehen. Sie sehen, wie einfach das ist.

Dies ist gerade das Schöne in der Zahlentheorie, man zerlegt die Behauptungen in kleine Teile, die Schritt für Schritt mit den einfachsten Mitteln bewiesen werden. Es ist in der That direkt:

$$x_1 z_2 - z_1 x_2 = x_1 (x_2 - y_2) - x_2 (x_1 - y_1) = - x_1 y_2 + x_2 y_1 = \pm 1 \text{ und}$$

$$y_1 z_2 - z_1 y_2 = y_1 (x_2 - y_2) - y_2 (x_1 - y_1) = + y_1 x_2 - y_2 x_1 = \pm 1 .$$

Wir haben uns höchstens nur noch klar zu machen, daß z_1 und z_2 zu einander teilerfremd sind. Dies aber ist sehr einfach nachzuweisen, wenn $x_1 z_2 - x_2 z_1 = \pm 1$ ist, so kann z_1 und z_2 keinen gemeinsamen Teiler haben, denn sonst müßte derselbe auch in ± 1 enthalten sein.

Dies wäre der Beweis des ersten Teils unserer Behauptung, daß alle Punkte, welche durch die in der

Figur vorkommenden Kreisbogen konstruiert werden, wirklich das aufgestellte arithmetische Gesetz befriedigen. Wir werden jetzt den Nachweis der Richtigkeit des zweiten Teiles zu liefern haben, daß jedes Zahlenquadrupel, welches das arithmetische Gesetz befriedigt, wirklich zwei durch einen Kreisbogen unserer Figur verbundenen Punkten als Abscissen angehört. Wir gehen wieder schrittweise vor: Wir werden zunächst nachweisen: Wenn in der Figur x vorkommt, so kommt auch $x+1$ vor. Man wird dies bei einer näheren Betrachtung der Figur leicht zugeben. Denn gehen wir in der Figur einmal aus von dem Dreieck $1,2\infty$, so werden wir stets Punkte erreichen, welche zu den von dem Dreieck 01∞ aus konstruierten Punkten in der Beziehung stehen, daß ihre Lage genau um 1 verschoben ist. Wir wollen unsere Behauptung jedoch noch genauer analytisch nachweisen. Wir sagten schon, wir kommen von den Punkten $\frac{x_1}{x_2}$ und $\frac{y_1}{y_2}$, welche die Determinante $(x\ y) = \pm 1$ haben, ausgehend zu den Punkten $\frac{x_1 \pm y_1}{x_2 \pm y_2}$; denn diese Operation ist ja gerade das Gesetz, durch welches die ganze Reihe der Dreiecke konstruiert wird. Wir wollen nun annehmen, daß auch die Punkte $\frac{x_1}{x_2}+1$ und $\frac{y_1}{y_2}+1$ wirklich vorkommen, (deren Determinante in der That $= x_1 y_2 - x_2 y_1 = \pm 1$ ist), und wollen dann nachweisen, daß wir erneut Punkte mit dem Vorsprung $+1$ erhalten, wenn wir von diesen Punkten aus zu den

benachbarten übergehen.

Wir schreiben $\frac{x_1 + x_2}{x_2}$ und $\frac{y_1 + y_2}{y_2}$. Wir gehen nun zu den Nachbarpunkten über; dieselben sind dem allgemeinen Gesetz zufolge gegeben durch: $\frac{(x_1+x_2)+(y_1+y_2)}{x_2 \pm y_2}$. Dies können wir aber auch schreiben: $\frac{x_1 \pm y_1}{x_2 \pm y_2} + 1$. Wir haben also in der That die Abscissen der früher konstruierten Punkte $\frac{x_1 \pm y_1}{x_2 \pm y_2}$, nur um 1 vermehrt. q.e.d. Wir wollen übrigens bemerken, wir führen dies so ausführlich durch, weil wir bald zu ähnlichen, jedoch schwierigeren Betrachtungen kommen, an deren Schlußweisen wir dann bereits gewöhnt sein werden.

Zweitens behaupten wir, wenn x eine Ecke ist, so findet sich auch $-\frac{1}{x}$ in unserer Figur. Wir werden dies wieder zunächst bei einzelnen Beispielen als richtig erweisen. Wir haben, wie wir wissen, ein Dreieck gebildet von den Ecken -1, 0 und ∞. Von diesem ausgehend gelangen wir durch einmalige Spiegelung resp. Inversion zu den Punkten -2 und $-\frac{1}{2}$. Wenn wir auf die Punkte $-2, -1, -\frac{1}{2}$ nun unsere Behauptung anwenden, so müssen letzterer zufolge auch die Punkte $\frac{1}{2}, +1, +2$ vorkommen, was uns gleichfalls bereits bekannt ist. Für einzelne Ecken ist also unsere Behauptung hiermit als richtig nachgewiesen. Nun müssen wir uns überzeugen, daß auch bei fortschreitendem Proceß dieselbe richtig.

bleibt. Wir nehmen also an, der Satz sei als richtig befunden für die Punkte $\frac{x_1}{x_2}$ und $\frac{y_1}{y_2}$, so daß auch die Punkte $-\frac{x_2}{x_1}$ und $-\frac{y_2}{y_1}$ in unserer Figur sicher vorkommen. Nun wollen wir sehen, ob auch für die entsprechenden Nachbarpunkte diese Beziehung bestehen bleibt. Wir erhalten die Nachbarpunkte wie bekannt durch:

$\frac{x_1 + y_1}{x_2 + y_2}$ und entspr. $\frac{-x_2 - y_2}{x_1 + y_1}$ resp. $\frac{x_1 - y_1}{x_2 - y_2}$ und entspr. $\frac{-x_2 + y_2}{x_1 - y_1}$.

Wir sehen, je zwei entsprechende Punkte stehen wieder in der Beziehung, daß wir nur Zähler und Nenner des einen Punktes zu vertauschen und ein Minuszeichen hinzuzufügen brauchen, um den anderen Punkt zu erhalten. Ist diese Beziehung aber für die Nachbarpunkte so geblieben, so wird sie allgemein auch für die folgenden Punkte gelten.

Hiermit haben wir denn sogar noch etwas mehr nachgewiesen, als wir anfangs ins Auge fassten. Unser Ergebniß werden wir zusammenfassen können in die Worte:

„Wir haben bewiesen, daß, wenn 3 Punkte die Ecken eines Dreiecks bilden, auch diejenigen Punkte die Ecken eines Dreiecks bilden, welche durch die Operation: $x' = x + 1$ aus den genannten dreien hervorgehen, und nicht minder diejenigen 3 Punkte ein

Dreieck bilden, die durch die Operation $x' = -\frac{1}{x}$ aus den genannten hervorgehen." Wir wollen die erste dieser beiden Operationen mit dem Buchstaben S, die zweite mit dem Buchstaben T kurz bezeichnen. Wir werden dann sagen: „Durch S wie durch T wird aus jedem Dreieck der Figur wieder ein Dreieck, das in der Figur vorkommt."

Nun wenn wir uns dies klar gemacht haben, möchten wir doch auch in arithmetisch geschlossener Form wissen, was dies überhaupt für Dreiecke sind, welche in unserer Figur vorkommen. Ja, da werden wir sagen, wir wollen doch einmal einige Male die Operation S auf ein Dreieck anwenden, dann vielleicht T, darauf wieder S u. s. w. Welches ist dann die allgemeinste Umformung, welche in dieser Weise aus jedem Dreieck der Figur wieder ein Dreieck der Figur entstehen läßt? Wir wollen auch hier wieder zuerst das Theorem selbst aufstellen und dann den Beweis für dasselbe bringen. Ersichtlich geben S und T zusammengesetzt immer eine lineare Substitution $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ mit ganzzahligen Coefficienten und der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Ich behaupte nun umgekehrt:

Jede derartige lineare Substitution $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ kann aus den Operationen S und T durch

Wiederholung und Kombination zusammengesetzt werden.

Hieraus folgt dann: Die Beziehung $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ ($\alpha\delta - \beta\gamma = 1$) gibt uns die allgemeinste Substitution, welche ein Dreieck in ein beliebiges anderes überführt.

Wir führen den Nachweis mit Hülfe der Kettenbrüche. Wir nehmen an, es sei $\alpha \geq \gamma$. (Der Fall $\alpha < \gamma$ wird, wie wir sofort sehen werden, bei dieser Annahme zugleich mit erledigt.) Außerdem möge γ positiv sein.

Wir wollen dann setzen:

1) $\alpha x + \beta = n_0(\gamma x + \delta) - (\alpha_1 x + \beta_1)$, wo $0 \leqq \alpha_1$ *) $< \gamma$ sein soll.

Wir wollen dann weiter $\gamma x + \delta$ durch $\alpha_1 x + \beta_1$ dividieren und bekommen:

2) $\gamma x + \delta = n_1(\alpha_1 x + \beta_1) - (\gamma_1 x + \delta_1)$, wo $0 \leqq \gamma_1 < \alpha_1$.

Wir gehen entsprechend weiter und erhalten:

3) $\alpha_1 x + \beta_1 = n_1(\gamma_1 x + \delta_1) - (\alpha_2 x + \beta_2)$, wo $0 \leqq \alpha_2 < \gamma_1$;

4) $\gamma_1 x + \delta_1 = n_2(\alpha_2 x + \beta_2) - (\gamma_2 x + \delta_2)$, wo $0 \leqq \gamma_2 < \alpha_2$ ist.

Wir erkennen, wenn wir in dieser Weise fortfahren, so werden die (positiven) Zahlen $\alpha, \gamma, \alpha_1, \gamma_1, \alpha_2, \gamma_2 \ldots$ u.s.w. immer kleiner und kleiner, bis wir schließlich als Coefficienten der x in dem zweiten Glied auf der rechten Seite einer solchen Gleichung den Wert 0 erhalten. Wir müssen also schließlich auf einen Ausdruck kommen, mag

*) Es kann allerdings α_1 auch $= 0$ sein, dann jedoch wären wir bereits am Ende unserer Entwickelung. Entsprechendes gilt

es nun $\alpha_\varrho x + \beta_\varrho$ oder $\gamma_\varrho x + \delta_\varrho$ sein, wo α_ϱ resp. γ_ϱ ver-schwindet, wir also nur noch eine Constante, die wir vorläufig mit d bezeichnen, vor uns haben. Diese so aufge-stellten Gleichungen wollen wir nun benutzen, um den Ausdruck $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ umzuformen.

Wir können zunächst folgendermaßen schreiben:

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = n_0 - \frac{\alpha_1 x + \beta_1}{\gamma x + \delta} = n_0 - \frac{1}{\frac{\gamma x + \delta}{\alpha_1 x + \beta_1}}.$$ Auf den Quotienten des Nenners wenden wir weiter die Gl. 2. an und erhalten:

$$\therefore\ x' = n_0 - \frac{1}{n_1 - \frac{\gamma_1 x + \delta_1}{\alpha_1 x + \beta_1}} = n_0 - \frac{1}{n_0 - \frac{1}{\left(\frac{\alpha_1 x + \beta_1}{\gamma_1 x + \delta_1}\right)}}.$$ Auf den eingeklammerten Bruch wenden wir dann die Gl. 3. an, so daß sich ergiebt:

$$x' = n_0 - \frac{1}{n_0 - \frac{1}{n_1 - \frac{\alpha_2 x + \beta_2}{\gamma_1 x + \delta_2}}} = n_0 - \frac{1}{n_0 - \frac{1}{n_1 - \frac{1}{\left(\frac{\gamma_1 x + \delta_1}{\alpha_2 x + \beta_2}\right)}}}.$$

Wir wenden in derselben Weise die Gl. 4, hierauf 5 u. s. w. an, bis die Entwicklung schließlich abbricht. Dann haben wir schließlich die Form:

$$x' = n_0 - \cfrac{1}{n_0 - \cfrac{1}{n_1 - \cfrac{1}{n_1 - \cfrac{1}{n_2 - \cfrac{1}{n_2 - \cdots - \cfrac{1}{n_p - \cfrac{1}{\left(\frac{ax+b}{d}\right)}}}}}}}.$$

(wo wir als den letzten Buchstaben, der dem Ausdruck $\frac{1}{\frac{ax+b}{d}}$ vorausgeht, n_x geschrieben haben, es könnte ebensowohl n_y sein!).

Der schließliche Quotient $\frac{ax+b}{d}$ in der Entwicklung läßt sich nun noch wesentlich vereinfachen. Als Determinante des ersten Quotienten $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ hatten wir $\alpha\delta-\beta\gamma$ bezeichnet und dies gleich 1 vorausgesetzt. Als Determinante des zweiten auftretenden Ausdrucks $\frac{\gamma x+\delta}{\alpha_1 x+\beta_1}$ nannten wir entsprechend $\gamma\beta_1-\delta\alpha_1$ bezeichnen, ebenso als Determinante des dritten Quotienten der Entwicklung $\alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1$ u. s. w. Die Determinante des letzten Quotienten ist dann einfach ad. Die aufeinander folgenden Determinanten wollen wir nun berechnen. Aus Gl. 1 der pag. 332 folgt zunächst, daß $\alpha_1=n_0\gamma-\alpha;\ \beta_1=n_0\delta-\beta$ ist. Setzen wir diese Werte in die zweite Determinante $\gamma\beta_1-\delta\alpha_1=1$ ein, so kommt: $\gamma\beta_1-\delta\alpha_1=n_0\gamma\delta-\beta\gamma-n_0\gamma\delta+\alpha\delta$ $=\alpha\delta-\beta\gamma=1$. In derselben Weise werden wir schrittweise weiterschließend für alle folgenden Determinanten den Wert 1 finden. Wir haben so den Satz gefunden:

„Die Determinanten der verschiedenen linearen Ausdrücke, welche hinter einander in unseren Formeln auftreten, sind alle gleich 1."

Also gilt auch für unseren letzten Ausdruck: $ad=1$. Hieraus folgt, daß $a=\pm1$, $d=\pm1$ ist, wo wir das + Zeichen wählen, was uns natürlich frei steht.

Unser Kettenbruch nimmt daher die Gestalt an:

$$x' = n_0 - \cfrac{1}{m_0 - \cfrac{1}{n_1 - \cfrac{1}{m_1 - \cfrac{1}{n_2 - \ddots - \cfrac{1}{n_\nu - \cfrac{1}{x+b}}}}}}$$

In Worten sagt dies Ergebnis:

„Wir haben so den Ausdruck $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ in ganz bestimmter Weise in einen schließlich abbrechenden Kettenbruch zerlegt." Wir behaupten nun:

„Diese Entwicklung besagt gar nichts anderes als dies: Wir haben die Operation $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ aus den S und T durch Kombination und Wiederholung erzeugt."

Und dies ist ja gerade das, was wir zeigen wollten. Der Nachweis dieser Behauptung ist sehr einfach; wir brauchen nur von unten beginnend die einzelnen Operationen, die der Kettenbruch angiebt zu betrachten. Zunächst ist aus x geworden $x+b$, dies ist aber genau dasselbe als wenn wir die Operation S $b$mal hinter einander auf x angewendet hätten. Dann machen wir aus $x+b$: $-\frac{1}{x+b}$. Dies ist aber die Operation T, auf $x+b$ angewandt. Zu $-\frac{1}{x+b}$ addieren wir darauf n_ν; wir erhalten also $n_\nu - \frac{1}{x+b}$; dies besagt aber wieder, ich wende die Operation S n_ν mal an. Hierauf folgt wieder die

Operation S, dann in bestimmter Zahl die Operation S nochmals, u. s. w. Wir können daher den ganzen Kettenbruch symbolisch auch schreiben:

$$x' = S^{m_0} T S^{m_1} T S^{m_2} T S^{m_3} \ldots\ldots S^{m_r} T S^{\beta}(x).$$

Hierin ist aber gerade ausgesprochen, was wir behauptet hatten, daß nämlich das x' aus dem x durch eine ganz bestimmte Wiederholung und Kombination der Operationen S und T hervorgeht.

Nun hatten wir aber in voriger Stunde gesehen, daß, wenn in unserer Figur irgend ein Paar von Punkten durch einen Halbkreis verbunden ist, daß dann auch dasjenige Paar durch einen Halbkreis verbunden wird, welches durch die Operation S und T in beliebiger Wiederholung und Aufeinanderfolge aus dem ersteren hervorgeht. Wir können daher in Rücksicht auf unseren letzten Satz sofort als Folgerung aufstellen:

„Wenn irgend zwei Punkte in unserer Figur durch einen Halbkreis verbunden sind, dann sind auch diejenigen durch einen Halbkreis verbunden, welche aus den ersten beiden durch eine Substitution $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ hervorgehen, unter $\alpha\beta\gamma\delta$ ganze Zahlen von der Determinante 1 verstanden."

Von diesem so genommenen Satze machen wir nun eine Anwendung. Wir wissen, die Punkte $x = \infty$

und $x=0$ sind nicht durch einen Halbkreis verbunden. Setzen wir diese Werte in obige Substitution ein, so kommt:
$x' = \frac{\alpha}{\gamma}$, und $x' = \frac{\beta}{\gamma}$. Dies besagt:
„Der Punkt $x=\frac{\alpha}{\gamma}$ und der Punkt $y=\frac{\beta}{\gamma}$ sind durch einen Halbkreis verbunden, unter $\alpha\beta\gamma\delta$ irgend 4 ganze Zahlen von der Determinante 1 verstanden."

Wir haben hiermit den zweiten Teil unserer Behauptung auf pag. 324 bewiesen. Wir hatten dort für die Punkte x und y gesetzt: $x = \frac{\pm x_1}{\pm x_2}$, $y = \frac{\pm y_1}{\pm y_2}$ und behauptet, daß für x_1, x_2, y_1, y_2 irgend 4 ganze Zahlen eintreten können, für die $x_1 y_2 - x_2 y_1 = \pm 1$ ist. Dies aber ist direct im letzten Satze enthalten; die $\pm$ Zeichen haben weiter keine principielle Bedeutung.

Wir erkennen insbesondere sogleich, daß jeder rationale Punkt der Geraden AB in unserer Figur erreicht wird. Denn $x = \frac{\alpha}{\gamma}$ drückt ja jeden dieser Punkte aus, α und γ als beliebige teilerfremde Zahlen genommen.

Hiermit ist der Teil unserer Untersuchung beendet, der sich mit der Betrachtung der Figur aus der Theorie der Modulfunktionen, unter Zugrundelegung der gewöhnlichen Maassgeometrie beschäftigen sollte.

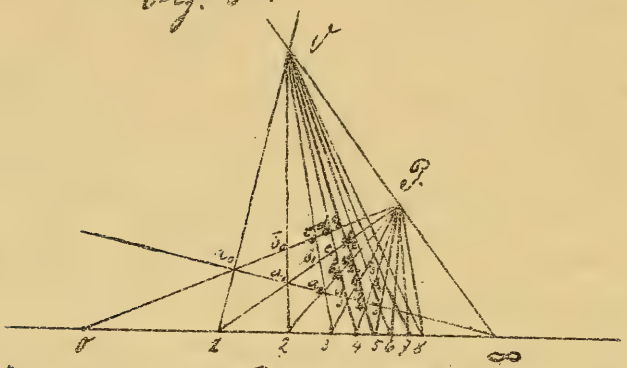
Nun wollen wir sehen, wie wir auf einem Grundgebilde erster Stufe rein projektivisch verfahrend eine Skala festlegen können, indem wir die Figur der Modulfunktionen uns dabei als Modell vor Augen halten, (um zu wissen, in welcher Reihenfolge die verschiedenen harmonischen Elemente aufzusuchen sind.) An Grundgebilden erster Stufe kommen in der Ebene in Betracht: das Strahlbüschel und die gerade Punktreihe. Da wir nur in einem begrenzten Raumteil operieren, so ist zwar das Strahlenbüschel unbegrenzt, die gerade Linie, die Punktreihe, hört dagegen auf, wo sie die Begrenzung trifft. Es wäre daher richtiger, für das Strahlbüschel die Skala aufzustellen, doch ist es der Ausdrucksweise halber bequemer zunächst die gerade Linie zu wählen. Wir wollen daher uns jetzt die Aufgabe stellen, in der angegebenen Weise auf der geraden Linie eine Skala zu konstruieren. Es seien drei Punkte als $0, 1, \infty$ gegeben, von denen wir ausgehen wollen. Wir werden zunächst mit Hülfe der Vierseitskonstruktion die ganzzahligen Punkte, d.h. die Punkte konstruieren, welche jetzt ganzzahlige Abscissen erhalten. Wir wissen, wie dies geschieht. Wir ziehen durch $0, 1$ und ∞ je eine gerade Linie (vergl. Figur.). Wir erhalten so die Punkte O, P und a_0. In diesem Vierseit ziehen wir die Diagonalen von a_0 nach ∞

und von P nach 1 hin. Dies giebt uns den Punkt a_1. Ziehen wir dann $0a_1$, so liefert uns diese Gerade als Schnitt den Punkt 2. Diese ganze Konstruktion ist uns ja bereits bekannt. Nun werden wir in analoger Weise aus den Punkten 1, 2 und ∞ den Punkt 3 konstruieren. Doch werden wir dabei die sich uns bietende Vereinfachung benutzen, möglichst bereits vorhandene Linien zu verwerten. Es sind dies die Linien 1 P, 2 0, ∞ 0. Im übrigen verfahren wir, wie vorhin, wir ziehen 2 P und erhalten so den Punkt a_2, den wir mit 0 verbinden. Dies führt uns zu dem Punkte 3. Wir erkennen, daß wir hiermit einen Schematismus für die Konstruktion gewonnen haben, den wir weiter benutzen werden. Wir verbinden 3 mit P, erhalten a_3, ziehen a_3 0 und erhalten so den Punkt 4. Entsprechend finden wir 5, 6, 7. u.s.w. Natürlich können wir auch nach links hin die Punkte −1, −2 ..... aufsuchen. Wir haben so alle ganzzahligen Punkte konstruiert. Die Skala ist damit so weit hergestellt, als wenn man etwa auf einem Meterstab die ganzen Centimeter bezeichnet hat, ohne die halben Centimeter oder die einzelnen Millimeter.

Wir gehen jetzt dazu über die halbzahligen Punkte zu konstruieren, d.h. die Punkte, deren Abscisse gleich $^1/_2$, $^3/_2$, $^5/_2$, $^7/_2$ u.s.w. zu setzen ist. Dies kann auf sehr

verschiedene Weise unter Benutzung der Figur, die wir bereits haben, geschehen.

Fig. 80.

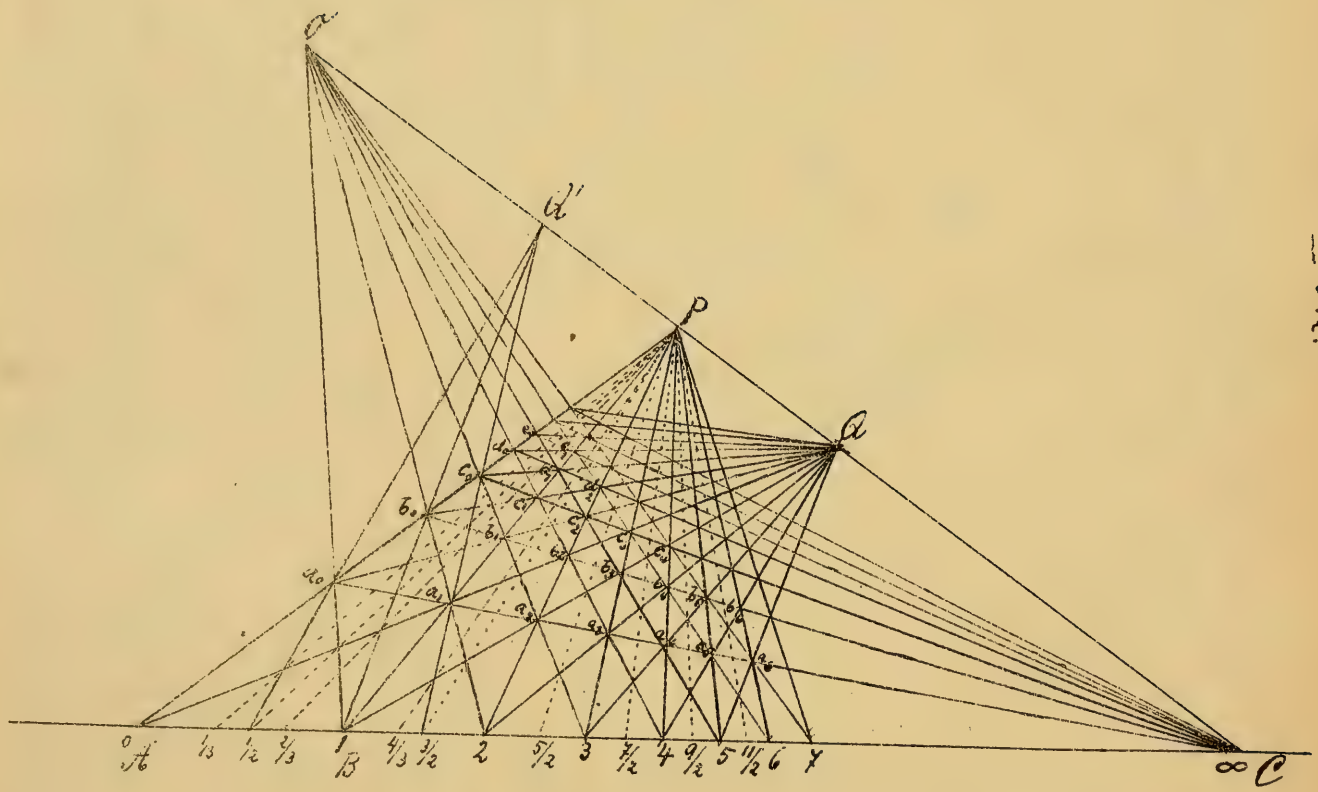


Wir können von den Punkten $b_0 b_1 b_2$ u.s.w. ausgehen, aber auch von den Punkten $c_0 c_1 c_2$ u.s.w. Doch kommen natürlich beide Wege, wie wir leicht direkt nachweisen, auf dasselbe hinaus. Wir wollen uns zunächst überzeugen, daß die Punkte $b_0 b_1 b_2$ u.s.w. auf einer graden Linie liegen, die durch den Punkt ∞ hindurchgeht. Es wird dies hinlänglich dargethan sein, wenn wir zeigen, daß die Verbindungslinie $b_0 \infty$ auch durch den Punkt b_1 hindurchgeht. Dies aber ist sehr einfach. Wir wissen zunächst, daß $1 a_1 b_1 P$ ein harmonisches Quadrupel bilden, da diese Punkte von O aus auf $1 2 3 \infty$ projiciert werden. Nun bilden aber auch $O a_0 b_0 P$ ein harmonisches Quadrupel, da sie von O aus auf $0, 1, 2, \infty$ projiciert werden. Hieraus folgt unmittelbar, daß $b_0 \infty$ auch durch b_1 (und weiterhin auch durch $b_2 b_3$ u.s.w.) gehen muß, da ja auch die 4 Strahlen

$\overline{c_0 \infty}$, $\overline{a_0 \infty}$, $\overline{b_0 \infty}$, $\overline{P \infty}$ ein harmonisches Quadrupel bilden. In ganz analoger Weise läßt sich zeigen, daß $c_0 c_1$ u. s. w. auf einer durch ∞ gehenden geraden Linie liegen, u. so fort. Wir erkennen weiter jedoch, daß auch die Punkte $0, a_1, b_2, c_3$ u. s. w. ebenso a_0, b_1, c_2, d_3, u. s. w. u. s. w. auf geraden Linien liegen. Auch dies ist leicht zu zeigen. Wir wollen z. B. einmal die Punkte $a_0 b_1 c_2$ u. s. w. ins Auge fassen. Offenbar können wir die Strahlbüschel in P und ∞ als projektiv ansehen der Art, daß allemal die Strahlen, die durch a_0, b_1, c_2 etc. gehen, einander entsprechen. Denn das Strahlbüschel in ∞ wird von P_0 in den Punkten $a_0 b_0 c_0 \ldots$, das Strahlbüschel in P von $a_0 \infty$ in den Punkten $a_0 a_1 a_2$ u. s. w. geschnitten, also in 2 Punktreihen, die in Bezug auf 0 perspektivisch sind. Da aber die so einander projektiv zugeordneten Strahlenbüschel in P und ∞ den Strahl $P\infty$ entsprechend gemein haben, so sind sie perspektiv zu einander, also liegen die Schnittpunkte $a_0 b_1 c_2 \ldots$ auf gerader Linie. Zugleich ergiebt sich aus diesem Beweis, daß die geraden Linien, $a_0 b_1 c_2 \ldots$, $b_0 c_1 d_2 \ldots$ u. s. w. ein Strahlbüschel bilden, dessen Träger δ auf 0∞ liegt.

Nachdem wir uns diese Verhältnisse klar gemacht haben, wird es uns leicht sein, die Punkte $\frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{5}{2}$ u. s. w. zu bestimmen. Wir ziehen einfach von P aus die Strahlen

Fig. 81.



durch die noch freien Kreuzungspunkte der Strahlbüschel O und Q', die natürlich wieder entsprechend auf geraden Linien liegen, und erhalten hiermit sofort die gewünschten Punkte $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ ....., Wir erkennen weiter auch, daß die erwähnten Kreuzungspunkte anders angeordnet auf Strahlen des Büschels in ∞ liegen. Alle diese Lagenbeziehungen lassen sich natürlich ins einzelnen auf die Vierseitskonstruktion zurückführen. Wir wollen dies z. B. darlegen für den Punkt $\frac{1}{2}$, woraus zugleich ersichtlich sein wird, daß wirklich wir diesem Punkt den Zahlenwert $\frac{1}{2}$ beilegen müssen. Wir betrachten die 4 Strahlen $0 P, 0 a_1$ und $1 P, 1 a_0$. Diese bilden ein Vierseit, dessen Diagonalen gerade durch ∞ und $\frac{1}{2}$ gehen. In der That sind so die Punkte $0, \frac{1}{2}, 1, \infty$ als ein harmonisches Quadrupel erwiesen.

Wir wollen jetzt noch andeuten, wie wir des weiteren die drittzähligen Punkte $\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \mid \frac{4}{3}, \frac{5}{3} \mid \frac{7}{3}, \frac{8}{3} \mid$ u. s. w. konstruieren können. Wir ziehen die Linien $\frac{1}{2} a_0, 1 b_0, \frac{3}{2} a_1, c_0$ u. s. w.; dieselben bilden ein Strahlbüschel, dessen Träger R' ist und wieder auf 0∞ liegt. Die nun entstehenden Kreuzungspunkte verbinden wir wieder mit P und erhalten so die verlangten Punkte, wie im einzelnen leicht zu zeigen ist.

In analoger Weise werden wir fortfahren, indem wir uns, was die Aufeinanderfolge der zu konstruierenden Punkte angeht, an das Farbbild der Figur der Modul-

funktionen halten. Wir haben so unseren Zielpunkt erreicht. Unser Resultat ist also:

„Wir konstruieren uns in der angegebenen Weise auf der geraden Linie eine projektive Skala, d. h. wir ordnen wirklich jedem Punkte (das Wort in idealisiertem Sinne genommen) der geraden Linie einen bestimmten Zahlenwerth zu, der entweder unmittelbar rational ist, oder schließlich als Grenze einer ∞ Reihe rationaler Zahlen als irrational definiert werden muß."

Wollten wir dieses nun umkehren, indem wir sagen: Zu jedem Zahlenwert gehört ein Punkt, so ist dies natürlich nicht richtig, da wir ja nur ein begrenztes Stück der geraden Linie betrachtet haben. Wohl aber können wir von einem Strahlenbüschel, welches ja auch in dem begrenzten Raume unbegrenzt ist, sagen:

„Legen wir ein unbegrenztes Grundgebilde erster Stufe, also ein Strahlbüschel der Konstruktion zu Grunde, so werden wir für jeden reellen Skalenwert von x, den ich vorschreiben mag, auch ein zugehöriges geometrisches Element im Strahlbüschel vorfinden."

Wir haben jetzt den zweiten Punkt unserer Behauptung zu erweisen, der sich bei der Aufstellung einer Skala mit Hülfe der Vierseitskonstruktion darbietet. Wir hatten gesagt: Wenn wir von drei anderen Punkten A', B', C ausgehend, denen wir entsprechend die Werte $x' = 0, 1, \infty$ beilegen, eine

neue Skala auf unserer Geraden konstruieren, so steht x' zu den früheren x in der Beziehung $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$. Diese Behauptung deckt sich völlig mit der umgekehrten: Wir können an Stelle von $A\,B\,C$ drei Punkte $A'\,B'\,C'$ stets so finden, daß ein angegebener linearer Zusammenhang $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$ herauskommt. *) Die eine Behauptung ist so gut wie die andere, da wir beide Male gleich viel willkürliche Größen haben. Im ersten Falle können wir die drei neuen Punkte A', B', C', im letzteren die Verhältnisse $a:b:c:d$ beliebig annehmen.

Wenn wir also den Verhältnissen $a:b:c:d$ einen anderen Wert beilegen, so werden jedesmal auch die Punkte A', B', C' andere werden. Wir können uns daher darauf beschränken zu beweisen, daß wir die drei Punkte $A\,B\,C$ stets so verschieben können, daß in Bezug auf sie als die neuen Ausgangspunkte zur Konstruktion der Skala $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$ wird, wo das Verhältnis der Konstanten $a:b:c:d$ als gegeben anzusehen ist. Wir werden hier 2 Fälle zu unterscheiden haben, den ersten Fall, wo die Konstanten a, b, c, d commensurabel sind und den zweiten Fall, wo die Konstanten a, b, c, d incommensurabel sind. Man wird verstehen

*) Ausgeschlossen bleiben aus leicht ersichtlichen Gründen nur diejenigen Ausdrücke $\frac{ax+b}{cx+d}$, deren Determinante $ad-bc$ verschwindet (bei denen also Zähler und Nenner proportional sind.)

daß wir nur den ersten Teil ausführlich zu behandeln haben, während wir den zweiten Teil dann durch ein Grenzverfahren (Exhaustionsverfahren im Sinne Euklids) erledigen können. Wir werden uns daher auf den ersten Fall beschränken. Wenn nun a, b, c, d commensurabel sind, dann können wir sie natürlich ganzzahlig annehmen und zwar ohne einen allen gemeinsamen Teiler, da es ja nur auf die Verhältnisse dieser 4 Größen ankommt. Es ist demnach gegeben: $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$, unter a, b, c, d ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler verstanden, von der Determinante $ad - bc = \pm N$, wo N dann auch eine ganze Zahl bezeichnet, die positiv sein soll. Wir wollen nun beweisen, daß wir unsere Coordinatengrundpunkte so abändern können, daß das neue Coordinatensystem x' mit dem alten System der x gerade in dieser Beziehung steht. Natürlich müssen wir den Beweis führen, ohne andere Hülfsmittel als die, welche in unserer Skalenkonstruktion selbst liegen. Wir fassen nun diese Aufgabe mit einem Gedanken an, der uns von der vorletzten Stunde bereits geläufig ist. Wir werden sagen, jede solche lineare Abhängigkeit läßt sich aus bestimmten einfachen Formeln durch Kombination und Wiederholung erzeugen. Wir denken hierbei daran, daß wir in der vorletzten Stunde von der Formel ausgingen: $x' = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$, wo $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ war und zeigten, daß jede

solche Substitution sich erzeugen läßt aus den einfacheren S (oder $x' = x+1$) und T (oder $x' = -\frac{1}{x}$). Wir wollen uns nun zunächst arithmetisch überzeugen, daß auch unsere Formel $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$ sich aus ähnlichen Substitutionen zusammensetzen läßt, und zwar behaupte ich, daß unsere Formel sich auf die 4 Operationen zurückführen läßt:
1.) S oder $x' = x+1$; 2.) T oder $x' = -\frac{1}{x}$; 3.) U oder $x' = -x$;
4.) V oder $x' = \frac{x}{n}$, wo n eine positive ganze Zahl sein soll.

Mit der Operation U können wir zunächst sicher erreichen, daß die Determinante unserer Substitution positiv ist. Wenn nämlich $ad - bc = -N$ ist, so können wir doch schreiben: $x' = -\frac{-ax-b}{cx+d}$; dies aber können wir deuten: $x' = -x''$, wo $x'' = \frac{-ax-b}{cx+d}$ zu setzen ist; letzteres ist aber eine lineare Substitution mit positiver Determinante N und $x' = -x''$ ist die Operation U.

Wir nehmen nun des weiteren an, es sei eine Substitution $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$ mit positiver Determinante $ad - bc = +N$ gegeben. Wir wollen jetzt zeigen, wie diese sich aus den 3 Operationen S T V kombinieren läßt. Wir nehmen an, c und d haben als größten gemeinschaftlichen Teiler n, so daß wir setzen können: $c = n.\gamma$, $d = n.\delta$, wo γ, δ teilerfremd sind.

Dann schreibt sich unsere Formel: $x' = \frac{ax+b}{n(\gamma x+\delta)}$.
Nun sagen wir, wir wollen uns 2 Zahlen α und β suchen,

so daß $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ist. Solche Zahlen werden immer und zwar auf ganz elementarem Wege zu finden sein, da γ und δ teilerfremd sind. Dann aber wird man setzen dürfen:

$a = m\cdot\alpha + \nu\cdot\gamma$; $b = m\cdot\beta + \nu\cdot\delta$, unter m und ν zwei ganze Zahlen verstanden. Lösen wir nämlich diese beiden linearen Gl. nach m und ν als Unbekannten auf, so kommt im Nenner für m und ν die Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ zu stehen, die ja $= 1$ ist. Also erhalten wir wirklich ganze Zahlen für m und ν. Führen wir diese Ausdrücke in unsere Formel ein, so wird:

$$x' = \frac{m\cdot(\alpha x+\beta)+\nu\cdot(\gamma x+\delta)}{n\cdot(\gamma x+\delta)} = \frac{m\cdot\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}+\nu}{n}.$$

In dieser letzten Formel haben wir aber den Beweis, um den es sich handelt, vor Augen stehen. Es geht nämlich x' aus x folgendermaßen hervor. Wir werden zunächst setzen $x'' = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$, wo $\alpha\beta - \gamma\delta = 1$. Diese Substitution stellt aber, wie wir wissen, nur eine Kombination der Operationen S und T dar. Dann werden wir weiter setzen $\frac{x'''}{m} = x''$; wir sehen hierin die Anwendung einer Operation V^m, ferner sei $x^{IV} = x^{III} + \nu$, welches uns eine ν malige Wiederholung der Operation S anzeigt, dann endlich $x' = \frac{x^{IV}}{n}$, abermals die Anwendung einer Operation V^n. Wir haben hiermit also bewiesen, was wir wollten, daß in der That jede ganzzahlige Substitution mit positiver Determinante sich

durch Wiederholung und Kombination der 3 Operationen S, T, V herstellen läßt.

Hiemit haben wir den schwierigsten Teil der Betrachtung erledigt. Wir brauchen jetzt nur noch den geometrischen Beweis zu erbringen, daß wir durch neue Wahl der 3 Grundpunkte A, B, C die Skalenwerte der einzelnen Punkte so verändern können, daß wir die Substitution S, T, U und V zwischen den neuen und alten Abscissen bekommen. Bei den drei ersten Operationen ist dies sehr leicht nachzuweisen. Wählen wir z.B. als neue Grundpunkte A', B', C' die Punkte $x = -1, 0, \infty$, denen wir jetzt also die Werte $x' = 0, 1, \infty$ zuerteilen. Wir wollen dann von diesen Punkten ausgehend bei der Konstruktion der Skala genau so verfahren wie es in der letzten Stunde geschehen war. v. Fig. 81. Wir bemerken aber sofort, daß wir dann die frühere Figur selber gar nicht zu ändern brauchen, indem alle Punkte, die zu konstruieren nötig sind, bereits in der Figur enthalten sind. Es werden daher nur die Benennungen der Punkte geändert, wobei direkt das Resultat herausspringt $x' = x + 1$, indem die alte Nummerierung um 1 gegen die neue zurücksteht. (Man erinnere sich der Ueberlegung von pag. 329.).

Nun wenden wir uns zu den Operationen T und U.

Wir können auch hier sagen: Genau wie bei der Operation S ist es bei den Operationen T und U. Auch bei den Operationen T und U brauchen wir gar keine

neue Figur zu machen, sondern wir werden nur neue Zahlen zu der alten Figur hinzuzunehmen brauchen.

Um nämlich T zu erhalten, wollen wir A', B', C' nach den Punkten $x = \infty, -1, 0$ legen. Wenn wir dann wie bisher die harmonischen Punkte konstruieren, so wird jetzt eben die Benennung so umgeändert sein, daß jetzt ∞' wird, was 0 war, -1, was $+1$ war, allgemein $x' = -\frac{1}{x}$, was x war. (vergl. pag. 329). Ebenso einfach ist es bei U. Wir werden die Punkte A', B', C' nach den Punkten $x' = 0, -1, \infty$ verlegen. Wieder wird die alte Figur unverändert gelten, nur sind die beigeschriebenen Abscissenwerte zu ändern, indem an Stelle von x eben $x' = -x$ zu treten hat.

Bei der vierten Operation V jedoch ist die Sache komplicierter. Wir werden wieder unsere Figur 81 zu betrachten haben. Wenn wir jetzt A', B', C' nach den Punkten $x = 0, \pi, \infty$ legen, und dann die Vierseite konstruieren, so giebt es <u>neue</u> Vierseite, die bisher in der Figur nicht vorkamen, und es bedarf einiger Ueberlegung, um zu sehen, daß die neuen Vierseite sich gerade aus den Querlinien $0\,Q, a, Q, b, Q$ u.s.w. so zusammensetzen lassen, daß infolge dessen diejenigen Skalenpunkte, die wir jetzt erhalten, immer mit früher bestimmten Punkten zusammenfallen, mit dem Unterschied jedoch, daß die neuen Abscissen x' gleich

dem $\frac{1}{n}$ fachen der früheren x werden. Wir wollen dies an unserer Figur im einzelnen wirklich nachweisen für $n=2$ und $n=3$ und zwar für die ganzzahligen und halbzahligen Skalenpunkte. Im ersteren Falle ($n=2$) legen wir die Punkte A', B', C' nach den Punkten $x=0, 2, \infty$, so daß diese also jetzt die Abscissen $0, 1, \infty$ bekommen. Wir wollen nun zunächst zeigen, daß für die ganzzahligen Punkte der neuen Skala in der That das Gesetz gilt $x' = \frac{x}{2}$. Es muß also der Punkt $x'=2$ nach dem Punkte $x=4$, der Punkt $x'=3$ nach dem Punkte $x'=6$ u. s. w. fallen. Dies ist aber sehr leicht zu zeigen. Wir werden (v. Fig. 81.) zur Konstruktion der ganzzahligen Punkte einfach die Linie der b unter Festhaltung der Punkte 0 und ∞ an Stelle der Linie der a benutzen, indem wir als erstes Viereck wählen die Strahlen $0\infty, 20, 0P_2$ und 0∞ und dann in der Zickzacklinie $0b_2, 2b_2, 4b_4$ u. s. w. uns bewegen. Hieraus aber folgt unmittelbar das Gesetz $x' = \frac{x}{2}$ für ganzzahlige Werte des x'. Nun wollen wir uns überzeugen, daß entsprechend diejenigen Punkte, die in der alten Skala mit $1, 3, 5$ u. s. w. bezeichnet sind, jetzt bei der neuen Konstruktion die Werte $1/2', 3/2', 5/2' \ldots$ erhalten. Auch dies ist unmittelbar aus unserer Figur zu ersehen, indem wir unser Augenmerk auf die Querlinien $0b_2, 2b_2, 4b_4$ u. s. w. richten, die wir zur Konstruktion der Punkte $1/2', 3/2', 5/2'$ zu ziehen

haben. Wir erkennen also, daß auch für die halbzahligen Punkte das Gesetz $x' = \frac{x}{2}$ gilt.

Wir wollen nun das Gleiche noch für $n=3$ nachweisen. Wir haben als Grundpunkte zu wählen die Punkte $x=0, 3, \infty$, denen wir jetzt die Abscissen $x'=0, 1, \infty$ zuverteilen. Wir wollen zunächst wieder zeigen, daß für alle ganzzahligen Punkte x' das Gesetz gilt: $x' = \frac{x}{3}$. Wir werden nämlich zur Konstruktion der ganzzahligen Punkte jetzt einfach die Linie der c gebrauchen. Die entsprechende Zickzacklinie, welche die ganzzahligen Punkte auf der geraden Linie bestimmt, wird dann gebildet durch den Linienzug $0\,C_0\,3\,C_3\,6$ u.s.w. Wir sehen sofort, daß hiernach die Abscisse $x=6$ jetzt $x'=2$ bekommt, daß allgemein für ganzzahlige x' gilt $x' = \frac{x}{3}$. Jetzt wollen wir das Gleiche wieder für die halbzahligen Punkte nachweisen. Wir wollen zeigen, daß die Punkte $x = 3/2\ 9/2, 15/2$ ..... jetzt die Werte $x' = 1/2', 3/2', 5/2'$ ..... bekommen. Wir benutzen ganz einfach zur Konstruktion derselben wieder die Geraden $0\,C_3$, $3\,C_6$ u.s.w. die unmittelbar zu den Punkten $3/2, 9/2$ u.s.w. hinführen. Z.B. entsteht der Punkt $3/2$ oder $1/2'$ als Schnittpunkt des Strahles, den wir von P durch den Durchkreuzungspunkt von $0\,C_3$ und $3\,C_0$ ziehen. Hierdurch ist auch für die halbzahligen Punkte x' die Gültigkeit des Gesetzes $x' = \frac{x}{3}$ aus unserer Konstruktion erwiesen.

Wenn man will, kann man diese Verhältnisse noch genauer im Einzelnen verfolgen. Wir werden heute zunächst noch zu dem Punkte c (pag. 289). einige Bemerkungen zu machen haben. Dieser Punkt betraf das System der Analysis oder der analytischen Geometrie, bei dem wir damit begannen, n unabhängige Variable anzunehmen, und bestimmte Gruppen von Transformationen zu Grunde legten. Ich will nur noch eine persönliche Bemerkung hinzufügen. Es handelt sich in dem bereits erwähnten Erlanger Programm, (wie in dem Programm selbst angegeben) um Anschauungen, die ich im persönlichen Verkehr mit Lie (jetzt Prof. in Leipzig, früher in Christiania) entwickelt habe.
Lie der sich besonders mit den Transformationsgruppen beschäftigt hat, hat eine ganze Theorie derselben ausgebildet, die in einem größeren Werke ihre Darstellung findet. „Theorie der Transformationsgruppen, bearbeitet von Lie und Engel. Bd. I. 1888; Bd. II. 1890. Ausserdem wird noch ein dritter Band erscheinen, wohl nicht in allzu ferner Zeit. Es kann natürlich gar nicht daran zu denken sein, auf den Inhalt dieser Theorien von Lie jetzt irgendwie einzugehen. Das Gebiet, das wir hier vor uns sehen, ist ebenso ausgedehnt als ohne Zweifel wichtig und wird vielleicht einmal in einer Specialvorlesung uns zu beschäftigen haben.

Die Bemerkung zum Punkte c möge sich darauf beschränken, auf die Lie'schen Arbeiten aufmerksam gemacht zu haben.

Damit haben wir jetzt den Cursus durchlaufen, der die Geschichte der nicht-euklidischen Geometrie darstellen sollte. Ich will die Vorlesung damit schließen, noch einige Worte über die geometrische Anschauung und die Axiome der Geometrie zu sagen.

Wir werden zuerst fragen, was sind „Axiome der Geometrie in der gewöhnlichen Auffassung?

Hierüber besteht folgende Ansicht: Man sagt, die Axiome sollen solche Thatsachen der Anschauung formulieren, die wegen ihres primitiven Charakters nicht weiter bewiesen werden können, da sie ohne weiteres uns gegeben sind, sie sollen gleichzeitig das Wesen der Anschauung erschöpfen. Alle geometrischen Beweise sollen nun der Art sein, daß sie in logischer Kette von Folgerungen und Schlüssen auf die so an die Spitze gestellten Sätze zurückführen und zwar so, daß es in der Geometrie gar nicht mehr nötig ist, an die Anschauung zu appellieren. Alles, was wir von der Anschauung etwa brauchen, ist gleichsam protokollarisch in den Axiomen niedergelegt.

Diese Definition der Geometrie scheint allenfalls auf die analytische Geometrie zu passen, in der man es für

überflüssig hält, die Formeln sich sämmtlich deutlich zu machen; diese ist aber im Grunde eine Analysis, die nur mit den Formeln operiert und nur ihre termini technici aus der Raumanschauung entnimmt, im übrigen aber auf eine geometrische Anschauung nicht nur der Beweise, sondern auch der Resultate verzichtet. Man kann eben z. B. sehr wohl mit der Gleichung der geraden Linie operieren, ohne wirklich sich die gerade Linie selbst in ihren betr. Beziehungen vorzustellen. (vergl. z. B. die Bücher von Hesse.)

Doch ob dies eine wirkliche Geometrie ist, möchte ich bezweifeln, es ist erst eine Vorbereitung zur Geometrie. Sie sehen, daß ich durchaus der Ansicht bin, daß auf die wirkliche Geometrie diese Definition der Axiome nicht passt. Ich erinnere Sie an die Figur der vorletzten Stunde (Fig. 81.). Wir können doch nicht von irgend welchen Querlinien daselbst sprechen, ohne die Figur vor Augen zu haben. Ich halte es demnach auch nicht für richtig, daß, wenn wir einmal die Axiome aufgestellt haben, wir dann die Anschauung bei unseren Untersuchungen hintenansetzen, beim wirklichen geometrischen Denken vielmehr begleitet uns die Raumanschauung bei jedem Schritte.

In der That wissen Sie ja auch bereits, daß ich eine andere Definition der Axiome dem entgegenstellen will.

„Ich schreibe den Axiomen die Bedeutung zu, daß sie Forderungen vorstellen, vermöge deren wir uns über die Ungenauigkeit der Anschauung oder über die Begrenztheit der Genauigkeit der Anschauung zu unbegrenzter Genauigkeit erheben."

Ich denke mir also einen geometrischen Beweis so, daß die Figur uns die einzelne Aufeinanderfolge der Teile derselben, die Lagenbeziehungen von Punkten und Linien vor Augen führen soll, indem wir uns aber bewußt sind daß das, was wir ungenau vor uns sehen, nun begrifflich genau gedacht werden soll. Dieser Anschauungsweise entspricht ein hohes Maass von Toleranz bei der Aufstellung der Axiome. Jedes System der Axiome muß zulässig erscheinen, welches innerhalb der Genauigkeitsgrenzen unserer Anschauung mit der letzteren verträglich ist. Man vergleiche hier das, was wir über das Wesen der nichteuklidischen Geometrie gesagt haben. Nur der Ungenauigkeit unserer räumlichen Anschauung ist es zuzuschreiben, daß wir hyperbolische, parabolische oder elliptische Geometrie bei unseren Maassbestimmungen in gleicher Weise zu Grunde legen können, da eben unsere Anschauung uns nicht mit Sicherheit zu entscheiden gestattet, daß irgend eine der 3 Theorieen falsch ist.

Nun käme die Frage nach der Entstehung der Axiome. Ja, wenn man zu der anderen Ansicht in Betreff des

Axiome festhält, so gilt der Streit darüber, ob die Axiome (resp. die Anschauung, die sich in den Axiomen ausdrückt) der Erfahrung entlehnt oder uns a priori gegeben sind. Wenn wir aber in den Axiomen begriffliche Festsetzungen sehen, die über die natürliche Anschauung hinausgreifen, so können dieselben nicht der Erfahrung entnommen sein. Denn wenn wir auch z.B. die Winkel im Dreieck messen, – ja, alles Messen ist mehr oder weniger von einer gewissen Ungenauigkeit begleitet, die uns mit aller Schärfe nicht zu entscheiden gestattet, ob die Summe der drei Winkel = 180° oder vielleicht grösser oder kleiner ist. Bei jeder Messung gibt es ein endliches Maass der Genauigkeit, über welches hinaus gar Nichts in Erfahrung gebracht wird. Wir werden daher sagen:

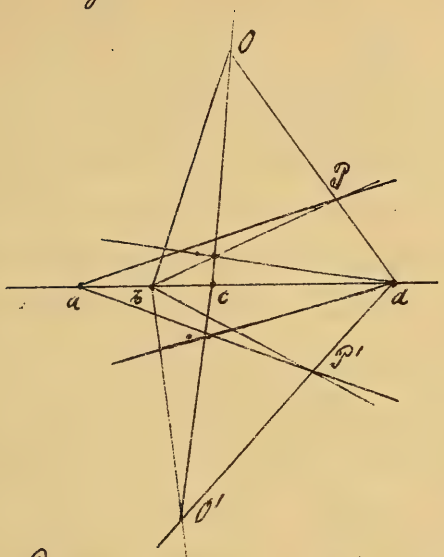
„Bei dieser Auffassung von der Bedeutung der Axiome sind die allgemeinen Bedingungen der Anschauung selbstverständlich durch die Erfahrung zu kontrolieren bezw. zu entwickeln durch möglichst genaue Messungen. Daß wir aber das so gewonnene Material auf absolut genaue Axiome beziehen, das stammt nicht aus der Erfahrung, sondern entstammt einem Bedürfnis unserer eigenen Natur." Das Gleiche gilt natürlich für alle Naturgesetze, die wir mathematisch aussprechen. Z.B. der Satz, daß die Beschleunigung mit

der Kraft proportional ist, dieser Satz kann experimentell auch nur bis zu einem gewissen Grade der Genauigkeit nachgewiesen werden, wenn wir denselben trotzdem in dieser Schärfe aufstellen, so ist dies eben ein mehr oder minder bewußter Act unseres logischen Denkens, daß uns die einfachste Annahme, die mit der Wirklichkeit bis auf die Fehlergrenzen der Beobachtung übereinstimmt, als genau richtig voraussetzen läßt.

Indem ich diese Definition der Axiome gebe, betrachte ich offenbar die Mathematik ihrem Grundcharakter nach als „transcendent," als etwas, das über die Ungenauigkeit unserer Anschauungen hinausgreift. Man kann nun fragen, worin wohl die Bedeutung der Entwicklung einer solchen transcendenten Wissenschaft in den Anwendungen wieder beruht. Der Gedanke, der uns hier vorschwebt, wird sich vielleicht so wiedergeben lassen: Die Resultate der reinen Mathematik sind in den Anwendungen um so genauer richtig, je genauer bei den beabsichtigten Anwendungen die Praemissen richtig sind, welche wir beim Beginn der mathematischen Schlußkette voraussetzen.

Wir wissen z. B., daß, „wenn wir mit Hülfe zweier verschiedener Parallelen zu drei gegebenen Punkten den vierten harmonischen Punkt konstruieren, daß wir dann beide Male auf denselben Punkt treffen."

Fig. 82.



Ja, wenn wir diese Konstruktion einmal wirklich in einer Zeichnung ausführen, so wird dieser Satz um so genauer seine Bestätigung finden, je genauer wir zeichnen. Mathematisch genau kann man nicht zeichnen oder konstruieren. Wenn man z. B. bei einem schön geschliffenen Prisma sagt: die Ebenen seien mathematisch eben, so ist dies natürlich nicht wahr. Dieselben sind nur sehr viel mehr eben als die Ebenen, die wir gewöhnlich vor uns sehen. (In Wirklichkeit ist ja die Glasmasse nicht einmal continuierlich; sie ist molecular aufgebaut; sie ist mit einer Uebergangsschicht bedeckt etc. etc.)

Schwieriger ist nun die Frage, was haben unsere Anwendungen und geometrischen Anschauungen für die reine Mathematik zu bedeuten? Können wir aus der Anschauung selbst Beweise entnehmen? Wenn z. B. irgend zwei Curven gezeichnet uns vorliegen, wie etwa in Fig. 83, so sagen wir gern: offenbar haben diese Curven eine gemeinsame Tangente.

Natürlich, doch nur erst für die Anschauung. Ob aber den mathematisch scharfen Curven, die wir durch unsere Zeichnung versinnlichen wollen, wirklich eine Tangente zuzuschreiben ist, dies hängt noch durchaus davon ab, welches mathematisch scharfe Gesetz ich für diese Curven mir vorgeschrieben denke.

Fig. 83.

Bei unserer Auffassung vom Wesen der Anschauung wird man daher durch anschauungsmässige Betrachtung von Figuren wohl eine gewisse allgemeine Anleitung darüber gewinnen, welche mathematischen Gesetze stattfinden mögen, und wie deren Beweis im Allgemeinen zugliedern sein mag. Einen wirklichen Beweis aber wird man erst bekommen, wenn man die vorgeschriebenen Figuren durch gesetzmäßig auf Grund der Axiome erzeugte Figuren ersetzt und an diesen den allgemeinen Gedankengang erst im Einzelnen ausführt. Die Beschäftigung mit anschauungsmässigen Dingen gibt dem Mathematiker Anregung und Uebersicht über die zu behandelnden Probleme, aber sie nimmt die mathematische Behandlung selbst nicht vorweg.*)

*) Darum kann ich mich doch gelegentlich, in der Vorlesung

An eine jede solche theoretische Ueberlegung knüpfen sich gleich praktisch allerhand Betrachtungen, ethischen, moralischen Inhalts möchte ich sagen, soweit diese Worte im Interessenbereich des Mathematikers eine Bedeutung haben. Womit soll sich der Mathematiker beschäftigen? Die einen sagen: Ja, die Anschauung ist doch nichts wert, ich schränke mich daher ein auf die in mir selbst erzeugten reinen Gebilde, unbekümmert um die Wirklichkeit. Das ist die Parole, die vorgewissen Stellen in Berlin ausgeht. In Göttingen dagegen wurde die Verbindung der reinen Mathematik mit der räumlichen Anschauung und den Problemen der Anwendungen stets aufrecht erhalten und nur in einer geeigneten Verknüpfung von Theorie und Praxis die wahre Grundlage mathematischen Forschens erkannt. Man war sich bewusst, daß die Entwickelungen der reinen Mathematik steril werden, wenn man um ihrer selbst willen an ihnen weiter baut, und daß uns Mathematiker eine gewisse Verantwortung trifft, wenn wir die Vertreter angewandter Gebiete ausschließlich unmathematische Wege gehen lassen, was notwendig zu einer Verflachung

*) und auch sonst, mit einem Beweise nur aus der angeschauten Figur begnügen, wenn ich nämlich annehme, daß die Ergänzungen, welche bei Durchführung der mathematischen Einzelbetrachtungen hinzuzufügen sind, nach bekannten Vorschriften von jedem Mathematiker gefunden werden können.

des Denkens hinführt.

Sie sehen, daß wirklich in diesem Punkte eine große Meinungsverschiedenheit unter den Mathematikern herrscht. Der einzelne Mathematiker ist ja ungehindert, mag er sich beschäftigen, wie er am meisten zu leisten sich fähig hält. Wenn aber eine ganze Generation mit dem Grundsatze erzogen wird, sich nur mit rein theoretischen Untersuchungen zu beschäftigen unbekümmert um die Anwendungen, während andererseits die Praktiker von der reinen Wissenschaft abgestumpft ihre eigenen Wege gehen, meine Herren, so halte ich dies für ein nationales Unglück.

Wenn man sich nun ganz auf den Standpunkt der Paedagogik stellen will, (dem wir mit dieser Discussion von selbst immer näher kommen), dann dürfte es noch aus einem besonderen Grunde angezeigt sein bei mathematischer Beschäftigung die Verbindung mit der Anschauung durchaus aufrecht zu erhalten. Der Philosoph Herbart (in den 30er Jahren in Göttingen) hat es in seinen Vorlesungen immer wieder ausgesprochen, was ich jetzt meine. Man vergleiche die zahlreichen Stellen in Herbart's Schriften, wo er über die pädagogische Behandlung der Mathematik spricht. Er hat ausgesprochen, daß für 5/6 aller Schüler die Mathematik absolut langweilig

ist, wenn man sie nicht in direkte Verbindung mit den Anwendungen bringt, während sie hinwiederum für 5/6 derselben sofort auf das Äusserste interessant ist, wenn man sie mit der Anschauung verknüpft.

Herbart betrachtet es nun überhaupt als das erste Erforderniß, den Unterricht interessant zu machen. *)

Darum soll man in der Schule in der Behandlung der Mathematik zunächst an die Anschauung sich halten und dann allmählig zu größeren und immer größeren Abstraktionen sich wenden. Die Anschauung ist das Mittel, die Abstraktion ist das Ziel.

Wenn man nun einmal zusieht, wie der mathematische Unterricht auf den Schulen getrieben wird, so findet man, daß die Methoden, die ich im Sinne Herbarts empfehle, leider nicht eingehalten werden. Die beiden Extreme des Unterrichts, deren Verbindung erst das Wesen der Sache ausmacht, finden sich im allgemeinen einseitig kultiviert. Das eine Extrem findet man vorzüglich in den humanistischen, das andere in den Real-Gymnasien gehandhabt. In den ersteren werden vielfach die Untersuchungen mit größter Schärfe durchgeführt, doch ohne das Bedürfnis zu zeigen, welches zu dieser Schärfe oder zu den Untersuchungen überhaupt hinführt, in den letzteren

*) was natürlich nicht im Sinne eines oberflächlichen Auffassung gemeint ist.

Schulen pflegt man sich zu ausschließlich an die praktische Anwendbarkeit zu halten. In dem erst Erwähnten liegt es denn auch begründet, wenn in späteren Alter mancher Philologe und Historiker von sich sagt, er habe die Mathematik nie verstanden.

In Betreff des anderen Extrems sei einmal auf ausländische Verhältnisse verwiesen. Wir denken z. B. an die Verhältnisse auf norwegischen Mittelschulen. Dort werden die Logarithmen erklärt und behandelt, wie man etwa lesen lernt. Es wird gezeigt, wie man mit den Logarithmen praktisch rechnet, – wer aber die Logarithmen berechnet hat, und wie dies geschehen ist u. dergl., dessen wird keine Erwähnung gethan. Ganz so schlimm ist es ja in Deutschland wohl nirgendwo. Aber namentlich bei denjenigen, die sich ausschließlich mit darstellender Geometrie beschäftigen, mit der Ausführung von Zeichnungen – besonders in Österreich ist der Unterricht in der darstellenden Geometrie sehr entwickelt – bei diesen wird das logische Denkvermögen leicht unentwickelt bleiben. Dies ist eben so wenig, was wir wollen, wie das, was auf humanistischen Gymnasien erzielt wird. Es muß vielmehr beides im Unterricht berücksichtigt werden, die wirkliche Anschauung und die Fähigkeit, sie zu beherrschen, wie die rein begriffliche Betrachtungsweise mit aller

mathematischen Strenge. Nur muß man stets sich vor Augen halten, was man in letzterer Hinsicht seinen Zuhörern zumuten darf. Ich empfehle keineswegs, daß man in der Schule die nicht-euklidische Geometrie erwähnt oder die Definition der Axiome, wie wir sie jetzt hier besprochen haben, letzteres vielleicht höchstens in den oberen Klassen.

Eins aber möchte ich meinen Zuhörern, denen einst als Lehrer thätig zu sein beschieden ist, ans Herz legen, den Herbart'schen Grundsatz alles Unterrichts:

„Seien Sie niemals absolut langweilig!"

H.

Date Due			
4/19/52			

BOSTON COLLEGE
3 9031 01528427 6

For Reference

Not to be taken from this room

150089

BOSTON COLLEGE SCIENCE LIBRARY

QA 685 K6

MATH. DEPT.

BOSTON COLLEGE LIBRARY
UNIVERSITY HEIGHTS
CHESTNUT HILL, MASS.

Books may be kept for two weeks and may be renewed for the same period, unless reserved.

Two cents a day is charged for each book kept overtime.

If you cannot find what you want, ask the Librarian who will be glad to help you.

The borrower is responsible for books drawn on his card and for all fines accruing on the same.